ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΜΑΘΗΜΑ **ΒΑΣΕΙΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ**
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2015-16
ΔΙΔΑΣΚΩΝ Ιωάννης Βασιλείου, *Καθηγητής*, Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Ερώτημα 1.

1. Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της συναρτησιακής εξάρτησης για να αποδείξετε ότι κάθε αξίωμα του Armstrong (αντανακλαστικότητα, προσαύξηση, μεταβατικότητα) είναι έγκυρο.
2. Χρησιμοποιείστε τα αξιώματα του Armstrong για να αποδείξετε την ορθότητα των ακόλουθων κανόνων:

- Ένωση: $if\ \alpha \rightarrow \beta\ and\ \alpha \rightarrow \gamma, then\ \alpha \rightarrow \beta\gamma$
- Αποσύνθεση: $if\ \alpha \rightarrow \beta\gamma, then\ \alpha \rightarrow \beta\ and\ \alpha \rightarrow \gamma$
- Ψευδο-μεταβατικότητα: $if\ \alpha \rightarrow \beta\ and\ \gamma\beta \rightarrow \delta, then\ \alpha\gamma \rightarrow \delta$

ΛΥΣΗ

1. Ο ορισμός της συναρτησιακής εξάρτησης είναι ο ακόλουθος: Έστω α και β δύο σύνολα γνωρισμάτων στο σχήμα της σχέσης R. Η συναρτησιακή εξάρτηση $\alpha \rightarrow \beta$ ισχύει στην R αν σε κάθε σχέση $r(R)$, για οποιεσδήποτε δύο πλειάδες t_1, t_2 της r που ισχύει $t_1[\alpha] = t_2[\alpha]$ τότε ισχύει και $t_1[\beta] = t_2[\beta]$.
   Κανόνας ανακλαστικότητας. Αν το α είναι ένα σύνολο από γνωρίσματα, και $\beta \subseteq \alpha$, τότε $\alpha \rightarrow \beta$.
   Θεωρούμε ότι $\exists$ t_1 και t_2 τέτοια ώστε $t_1[\alpha] = t_2[\alpha]$.
   Ισχύει και $t_1[\beta] = t_2[\beta]$, δεδομένου ότι $\beta \subseteq \alpha$.
   Συνεπώς, από τον ορισμό της συναρτησιακής εξάρτησης $\alpha \rightarrow \beta$.
   Κανόνας προσαύξησης. Αν $\alpha \rightarrow \beta$, και γ είναι ένα σύνολο γνωρισμάτων, τότε $\gamma\alpha \rightarrow \gamma\beta$.
   Θεωρούμε ότι $\exists$ t_1 και t_2 τέτοια ώστε $t_1[\gamma\alpha] = t_2[\gamma\alpha]$.
   Ισχύει και $t_1[\gamma] = t_2[\gamma]$, καθώς $\gamma \subseteq \gamma\alpha$.
   Ομοίως, ισχύει $t_1[\alpha] = t_2[\alpha]$, καθώς $\alpha \subseteq \gamma\alpha$.
   Εφόσον $\alpha \rightarrow \beta$, θα ισχύει και $t_1[\beta] = t_2[\beta]$.
   Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα αποτελέσματα για την ένωση των γνωρισμάτων γ και β ισχύει $t_1[\gamma\beta] = t_2[\gamma\beta]$.
   Άρα από τον ορισμό της συναρτησιακής εξάρτησης $\gamma\alpha \rightarrow \gamma\beta$.
   Κανόνας μεταβατικότητας. Αν $\alpha \rightarrow \beta$ και $\beta \rightarrow \gamma$, τότε $\alpha \rightarrow \gamma$.
   Θεωρούμε ότι $\exists$ t_1 και t_2 τέτοια ώστε $t_1[\alpha] = t_2[\alpha]$.
   Εφόσον $\alpha \rightarrow \beta$, θα ισχύει και $t_1[\beta] = t_2[\beta]$.
   Εφόσον $\beta \rightarrow \gamma$, θα ισχύει και $t_1[\gamma] = t_2[\gamma]$.
   Συνεπώς, από τον ορισμό της συναρτησιακής εξάρτησης $\alpha \rightarrow \gamma$.
2. Ένωση. Ισχύον τα ακόλουθα:
   $\alpha \rightarrow \beta$ (δίνεται)
   $\alpha\alpha \rightarrow \alpha\beta$ (προσαύξηση)
   $\alpha \rightarrow \alpha\beta$ (ένωση των κοινών γνωρισμάτων)
   $\alpha \rightarrow \gamma$ (δίνεται)
   $\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta$ (προσαύξηση)
   $\alpha \rightarrow \beta\gamma$ (μεταβατικότητα και αντιμετάθεση γνωρισμάτων)

Αποσύνθεση. Ισχύουν τα ακόλουθα:
$\alpha \rightarrow \beta\gamma$ (δίνεται)
$\beta\gamma \rightarrow \beta$ (αντανακλαστικότητα)
$\alpha \rightarrow \beta$ (μεταβατικότητα)
$\beta\gamma \rightarrow \gamma$ (αντανακλαστικότητα)
$\alpha \rightarrow \gamma$ (μεταβατικότητα)
Ψευδο-μεταβατικότητα. Ισχύουν τα ακόλουθα:
$\alpha \rightarrow \beta$ (δίνεται)
$\alpha\gamma \rightarrow \gamma\beta$ (προσαύξηση και αντιμετάθεση γνωρισμάτων)
$\gamma\beta \rightarrow \delta$ (δίνεται)
$\alpha\gamma \rightarrow \delta$ (μεταβατικότητα)

Ερώτημα 2.
Θεωρείστε μία σχέση $R(A, B, C, D, E)$ και το σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων $F = \{A \rightarrow BC, CD \rightarrow E, B \rightarrow D, E \rightarrow A\}$
1. Υπολογίστε το B^+.
2. Υπολογίστε την κλειστότητα F^+ και τα υποψήφια κλειδιά της R.
3. Υπολογίστε την κανονική κάλυψη F_c.
4. Δώστε μια αποσύνθεση χωρίς απώλειες συνδέσμου (lossless-join decomposition) σε BCNF της R.
5. Δώστε μια αποσύνθεση χωρίς απώλειες συνδέσμου που διατηρεί τις εξαρτήσεις (dependency preserving) σε 3NF της R.

ΛΥΣΗ

1. Ξεκινάμε με $B^+ = B$. Λαμβάνουμε υπόψη συναρτησιακές εξαρτήσεις της F στη μορφή $\beta \rightarrow \gamma$, όπου $\beta \subseteq B^+$. Οι μόνες συναρτησιακές εξαρτήσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη είναι οι $B \rightarrow B$ και $B \rightarrow D$. Συνεπώς, $B^+ = BD$. Δεν υπάρχουν άλλες εξαρτήσεις που να εφαρμόζονται. Άρα, $B^+ = BD$.
2. Δεδομένου της $A \rightarrow BC$, συμπεραίνουμε $A \rightarrow B$ και $A \rightarrow C$ (αποσύνθεση).
Δεδομένου των $A \rightarrow B$ και $B \rightarrow D$, συμπεραίνουμε $A \rightarrow D$ (μεταβατικότητα).
Δεδομένου των $A \rightarrow C$ και $A \rightarrow D$, συμπεραίνουμε $A \rightarrow CD$ (ένωση).
Ομοίως οι $A \rightarrow B$ και $A \rightarrow D$, συνεπάγονται $A \rightarrow BD$ (ένωση).
Δεδομένου των $A \rightarrow CD$ και $CD \rightarrow E$, συμπεραίνουμε $A \rightarrow E$ (μεταβατικότητα).
Δεδομένου ότι $A \rightarrow A$ (αντανακλαστικότητα) και από τα προηγούμενα βήματα ισχύουν $A \rightarrow BC$, $A \rightarrow D$ και $A \rightarrow E$, συνεπάγεται $A \rightarrow ABCDE$ (ένωση).
Δεδομένου ότι $E \rightarrow A$ και $A \rightarrow ABCDE$, ισχύει και $E \rightarrow ABCDE$ (μεταβατικότητα).
Δεδομένου ότι $CD \rightarrow E$ και $E \rightarrow ABCDE$, ισχύει και $CD \rightarrow ABCDE$ (μεταβατικότητα).
Δεδομένου ότι $B \rightarrow D$, ισχύει και $BC \rightarrow CD$ (προσαύξηση με C), και δεδομένου ότι $CD \rightarrow ABCDE$, ισχύει και $BC \rightarrow ABCDE$ (μεταβατικότητα).
Επιπλέον, $B \rightarrow B$, $C \rightarrow C$, $D \rightarrow D$ (αντανακλαστικότητα).
Δεδομένου ότι $B \rightarrow B$ και $B \rightarrow D$, ισχύει και $B \rightarrow BD$ (ένωση).
Δεδομένου ότι $B \rightarrow B$, ισχύει $BD \rightarrow BD$ (προσαύξηση με D). Επιπλέον, ισχύει $BD \rightarrow B$ και $BD \rightarrow D$ (αποσύνθεση).
Συνεπώς, οποιαδήποτε συναρτησιακή εξάρτηση με A, E, BC, ή CD στην αριστερή πλευρά του βέλους είναι στο F^+, ανεξάρτητα από το ποια άλλα γνωρίσματα εμφανίζονται σε αυτή. Έστω ότι με * συμβολίζεται οποιοδήποτε σύνολο γνωρισμάτων της R, τότε στο F^+ είναι οι: $B \rightarrow B$, $C \rightarrow C$, $D \rightarrow D$, $B \rightarrow D$, $B \rightarrow BD$, $BD \rightarrow BD$, $BD \rightarrow B$, $BD \rightarrow D$, και όλες οι συναρτησιακές εξαρτήσεις της μορφής $A* \rightarrow \alpha$, $E* \rightarrow \alpha$, $BC* \rightarrow \alpha$, $CD* \rightarrow \alpha$, όπου α είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $\{A, B, C, D, E\}$.
Τα υποψήφια κλειδιά είναι τα εξής: A, E, BC, και CD.

3. Η αριστερή πλευρά κάθε συναρτησιακής εξάρτησης της F είναι μοναδική. Επιπλέον, δεν υπάρχει κανένα γνώρισμα σε καμία από τις συναρτησιακές εξαρτήσεις που να είναι εξωτερικό. Συνεπώς, $F_c = F$.
4. Η $B \rightarrow D$ δεν είναι τετριμμένη και το B στην αριστερή πλευρά δεν είναι υπερκλειδί. Συνεπώς η R δεν είναι σε BCNF. Την αποσυνθέτουμε στις σχέσεις $R_1(A,B,C,E)$, $R_2(B,D)$. Οι σχέσεις αυτές είναι σε BCNF και η αποσύνθεση είναι χωρίς απώλειες συνδέσμου.
5. Από το ερώτημα 3 η κανονική κάλυψη ισούται με το F. Με βάση κάθε μια συναρτησιακή εξάρτηση της κανονικής κάλυψης παράγουμε μια σχέση, οπότε: $R_1(A,B,C)$, $R_2(C,D,E)$, $R_3(B,D)$, $R_4(E,A)$. Η R_1 περιέχει ένα υποψήφιο κλειδί της R, οπότε η αποσύνθεση είναι 3NF, χωρίς απώλειες συνδέσμου που διατηρεί τις εξαρτήσεις.
   Να σημειωθεί ότι το αρχικό σχήμα $R(A,B,C,D,E)$ είναι ήδη σε 3NF, οπότε trivially αποτελεί μια αποσύνθεση χωρίς απώλειες συνδέσμου που διατηρεί τις εξαρτήσεις.

Ερώτημα 3.

1. Κατασκευάστε ένα B+-tree για τις ακόλουθες τιμές κλειδιού.

$$(2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31)$$

Θεωρείστε ότι το δέντρο είναι αρχικά άδειο και οι τιμές προστίθενται σε αύξουσα σειρά. Επιπλέον, ο αριθμός των δεικτών που αντιστοιχούν σε έναν κόμβο είναι έξι.

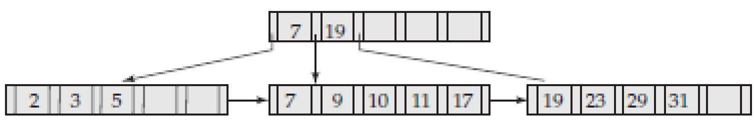
2. Για το B+-tree που προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα, δείξτε τη μορφή του δέντρου μετά από κάθε μία από τις παρακάτω λειτουργίες, οι οποίες συμβαίνουν διαδοχικά.
   a. Insert 9.
   b. Insert 10.
   c. Insert 8.
   d. Delete 23.
   e. Delete 19.

ΛΥΣΗ

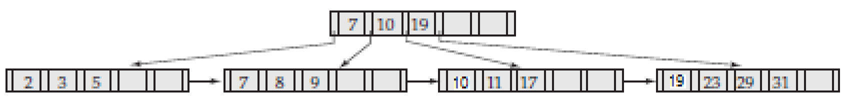
1. Το B+-tree που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

2. Παρακάτω δίνονται τα αντίστοιχα B+-trees.
   a. Insert 9.

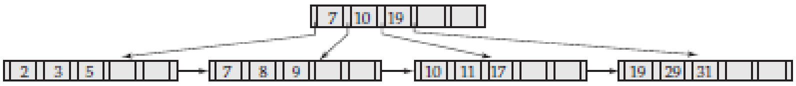
   b. Insert 10.



   c. Insert 8.



   d. Delete 23.



e. Delete 19.