Εισαγωγή στις Περιγραφικές Λογικές
Σύνταξη, Σημασιολογία και Αλγόριθμοι Συλλογιστικής

Γιώργος Στοΐλος

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

1. Εισαγωγή

Ένα από τα προβλήματα με το οποίο ασχολείται η Επιστήμη των Υπολογιστών και ιδιαίτερα ο τομέας της Τεχνητή Νοημοσύνης είναι το πώς μπορεί να καταγραφεί η ανθρώπινη γνώση σε ένα Υπολογιστικό Σύστημα ή αλγόριθμο. Η γνώση αυτή, αφού εισαχθεί στο σύστημα ή τον αλγόριθμο από τον άνθρωπο, θα μπορεί να αξιοποιηθεί για την εξαγωγή πιο ευφυών αποτελεσμάτων τα οποία θα πλησιάζουν σε ποιότητα αυτά της ανθρώπινης συλλογιστικής και σκέψης. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα αυτό απασχόλησε πρώτους του μαθηματικούς, καθώς από την εποχή του Αριστοτέλη προσπαθούν να βρουν έναν *τυπικό (formal)* (μαθηματικό) τρόπο για να καταγράψουν την ανθρώπινη γνώση. Τι σημαίνει όμως τυπική καταγραφή της γνώσης και γιατί αυτή δεν μπορεί να γίνει με την περιγραφή της σε απλή φυσική γλώσσα, όπως άλλωστε ένας μεγάλος όγκος γνώσης καταγράφεται στο παρών βιβλίο; Η απάντηση έρχεται από τους μαθηματικούς οι οποίοι τονίζουν ότι η φυσική γλώσσα δεν έχει τέτοιο μαθηματικό υπόβαθρο που να επιτρέπει τη χρήση της για αυτούς τους σκοπούς. Απεναντίας μάλιστα, η χρήση της αντιβαίνει στην αυστηρότητα και την τυπικότητα των μαθηματικών. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την πρόταση «Χτύπησε το παιδί με το ξύλο». Η πρόταση αυτή παρόλο που είναι καθ’ όλα νόμιμη επιδέχεται διττής ερμηνείας. Μπορεί να σημαίνει ότι το παιδί που κρατούσε ένα ξύλο στα χέρια του χτύπησε ή ότι κάποιος άλλος χτύπησε το παιδί χρησιμοποιώντας ένα ξύλο. Βλέπουμε λοιπόν ότι παρ’ όλο που οι επιμέρους έννοιες της πρότασης, όπως είναι το παιδί, το ξύλο κλπ επιδέχονται μοναδικής ερμηνείας η σύνδεση των εννοιών επιφέρει αβεβαιότητα και αμφισημία. Για το λόγο αυτό οι μαθηματικοί έχουν εισάγει ειδικές γλώσσες οι οποίες και αναφέρονται ως *γλώσσες αναπαράστασης γνώσης (knowledge representation languages)*.

Οι γλώσσες αναπαράστασης γνώσης δε διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από τις φυσικές γλώσσες που εμείς γνωρίζουμε όπως τα Ελληνικά ή τα Αγγλικά. Αποτελούνται από ένα *αλφάβητο (alphabet)*, ένα *συντακτικό (syntax)* και μια *σημασιολογία (semantics).* Έκτος όμως από την τυπικότητά τους οι γλώσσες αναπαράστασης γνώσης έχουν και ένα επιπλέον χαρακτηριστικό. Το επιπλέον αυτό στοιχείο ονομάζεται *θεωρία αποδείξεων* (*proof theory*) ή *μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων (reasoning algorithm)*. Ο ρόλος του είναι να περιγράφει κανόνες με βάση τους οποίους στηριζόμενοι σε μια αρχική γνώση, η οποία έχει περιγραφεί με μια γλώσσα αναπαράστασης γνώσης, να μπορούμε να εξάγουμε νέα γνώση και νέα συμπεράσματα από τα αρχικά γεγονότα. Όπως γίνεται αντιληπτό το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στους επιστήμονες της κλάδου των υπολογιστών, καθώς η καταγραφή και μόνο γνώσης σε ένα υπολογιστικό σύστημα δε συνεπάγεται και τη δημιουργία ευφυών εφαρμογών, αλλά χρειάζεται και ένας τρόπος για την εκμαίευση γνώσης από την ήδη υπάρχουσα.

Κατά τη διάρκεια των χρόνων έχει αναπτυχθεί μια πληθώρα από γλώσσες αναπαράστασης γνώσης. Κάποιες, όπως είναι η Προτασιακή Λογική (Propositional Logic) (Mendelson, 1987) ή η Κατηγορηματική Λογική Πρώτης Τάξης (First-Order Predicate Logic) (Mendelson, 1987), έχουν αναπτυχθεί από μαθηματικούς, άλλες όμως όπως τα Σημασιολογικά Δίκτυα (Semantic Networks) (Quillian, 1967) και οι Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ) (Description Logics – DLs) (Baader et. al., 2001) έχουν αναπτυχθεί από επιστήμονες πληροφορικούς για να επιτελέσουν και να καλύψουν συγκεκριμένες ανάγκες του κλάδου τους. Για το λόγο αυτό σε πολλές περιπτώσεις οι γλώσσες αυτές ξέφευγαν από την αυστηρότητα και την τυπικότητα που πρέπει να διέπει τις γλώσσες αναπαράστασης γνώσης. Για παράδειγμα τα Σημασιολογικά Δίκτυα αναπαριστούν γνώση χρησιμοποιώντας ένα οπτικό (γραφικό) μοντέλο. Αυτό έχει το πλεονέκτημα οι γλώσσες αυτές να είναι απλούστερες στην κατανόηση και τη χρήση από επιστήμονες πληροφορικούς ή και απλούς χρήστες, οι οποίοι στις περισσότερες των περιπτώσεων έχουν περιορισμένες γνώσεις μαθηματικής λογικής, από την άλλη όμως η έλλειψη αυστηρής τυπικότητας δημιουργούσε προβλήματα.

Από την προσπάθεια καθορισμού τυπικής σημασιολογίας στη γλώσσα των Σημασιολογικών Δικτύων προέκυψε η γλώσσα των Περιγραφικών Λογικών (ΠΛ). Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, τα δομικά στοιχεία των ΠΛ είναι οι έννοιες, οι ρόλοι και τα άτομα. Επιπλέον κάθε ΠΛ διαθέτει και ένα σύνολο *κατασκευαστών εννοιών* (concept constructors) οι οποίοι επενεργούν πάνω σε έννοιες με σκοπό τη δημιουργία περισσότερο περίπλοκων εννοιών. Για παράδειγμα μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια Πατέρας χρησιμοποιώντας τις επιμέρους έννοιες Αρσενικό, Άνθρωπος, το ρόλο εχειΠαιδι αλλά και τους κατασκευαστές, $\sqcap$ και $\exists$ ως εξής:

$$\text{Πατέρας} \equiv \text{Αρσενικό} \sqcap \exists \text{εχειΠαιδι}.\text{Άνθρωπος}$$

Το σύμβολο $\equiv$ δηλώνει τον ορισμό της έννοιας Πατέρας από τις επιμέρους έννοιες και τους κατασκευαστές. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας το άτομο Πέτρος, μπορούμε να δηλώσουμε ότι ο Πέτρος είναι Πατέρας γράφοντας, Πατέρας(Πέτρος). Όπως γίνεται αντιληπτό ανάλογα με το σύνολο των κατασκευαστών που χρησιμοποιούμε κάθε φορά ορίζουμε και μια διαφορετική ΠΛ. Εν κατακλείδι οι ΠΛ συνδυάζουν τόσο τυπική σημασιολογία όσο και απλότητα στη χρήση και την κατανόησή τους, πράγμα που τις έχει καταστήσει μέχρι αυτή τη στιγμή τις de facto γλώσσες για την περιγραφή γνώσης στο Σημασιολογικό Ιστό (Baader et. al., 2002).

2. Βασικές Περιγραφικές Λογικές

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποιους από τους βασικούς κατασκευαστές εννοιών των περιγραφικών λογικών. Η μελέτη αυτή θα επικεντρωθεί στη σύνταξη και τη σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών καθώς επίσης και στη γενική θεωρία σημασιολογίας των Περιγραφικών Λογικών.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, όπως κάθε γλώσσα έτσι και οι ΠΛ έχουν ένα αλφάβητο. Αντίθετα όμως με τις γλώσσες που γνωρίζουμε το αλφάβητο αυτό δεν είναι σταθερό αλλά μπορεί να οριστεί από το χρήστη. Το αλφάβητο ορίζεται από ένα σύνολο *ατομικών εννοιών (atomic concepts)* **C**, ένα σύνολο *ατομικών ρόλων (atomic roles)* ή αλλιώς *σχέσεων (relations)* **R**, και από ένα σύνολο *ατόμων (individuals)* **I**. Συνήθως χρησιμοποιούμε τα γράμματα A, B για να αναπαραστήσουμε ατομικές έννοιες, τα γράμματα R, S για να αναπαραστήσουμε ρόλους και τα γράμματα a, b για να αναπαραστήσουμε άτομα. Π*εριγραφές εννοιών (concept descriptions)* ή αλλιώς *περίπλοκες έννοιες (complex concepts)* μπορούμε να δημιουργήσουμε από τις πρωτογενείς έννοιες σε συνδυασμό με τους κατασκευαστές εννοιών των ΠΛ και συνήθως χρησιμοποιούμε τα γράμματα C, D για να αναφερθούμε σε αυτές. Επιπρόσθετα, προσέξτε ότι χρησιμοποιούμε λέξεις που ξεκινούν με κεφαλαία για την αναπαράσταση εννοιών, πρωτογενών ή μη, π.χ. Άνθρωπος, ενώ λέξεις που ξεκινούν με μικρό για την αναπαράσταση ρόλων, π.χ. εχειΠαιδι.

Μια από τις πιο βασικές ΠΛ είναι η γλώσσα $\mathcal{AL}$ (attributive language) (Schmidt-Schauss M., & Smolka G., 1991). Αυτή δημιουργείται από ένα αλφάβητο πρωτογενών εννοιών και ρόλων, από το σύνολο κατασκευαστών $\{\neg, \sqcap, \forall, \exists\}$ και από δυο περιγραφές εννοιών οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία για τις ΠΛ γλώσσες και συμβολίζονται με $\top$ και $\bot$. Ας δούμε όμως πώς ορίζονται τυπικά οι περιγραφές εννοιών στην ΠΛ $\mathcal{AL}$. Έστω A μια ατομική έννοια, C, D δυο περιγραφές εννοιών και R ένας ατομικός ρόλος. Οι περιγραφές εννοιών στη γλώσσα $\mathcal{AL}$ ορίζονται επαγωγικά από την ακόλουθη *αφηρημένη σύνταξη (abstract syntax):*

$$C, D \rightarrow A \mid \top \mid \bot \mid \neg A \mid C \sqcap D \mid \forall R.C \mid \exists R.\top$$

Οι έννοιες $\top$ και $\bot$ ονομάζονται *καθολική έννοια (universal concept)* και *κενή έννοια (bottom concept)*, αντίστοιχα. Από την άλλη οι έννοιες $\forall$R.C και $\exists$R.$\top$ ονομάζονται *περιορισμός τιμής (value restriction)* ή αλλιώς *καθολικός περιορισμός (universal restriction)* και *περιορισμένος υπαρξιακός περιορισμός (limited existential restriction)*, αντίστοιχα. Τέλος παρατηρήστε ότι στη γλώσσα $\mathcal{AL}$ η άρνηση μπορεί να εμφανιστεί μόνο μπροστά από ατομικές έννοιες.

Ας δώσουμε λοιπόν κάποια παραδείγματα εννοιών που μπορούμε να περιγράψουμε χρησιμοποιώντας την εκφραστικότητα που παρέχει η ΠΛ $\mathcal{AL}$. Έστω το αλφάβητο που περιέχει τις πρωτογενείς έννοιες Άνθρωπος, Θηλυκό και το ρόλο εχωΠαιδι. Τότε η περιγραφική έννοια Άνθρωπος⊓Θηλυκό περιγράφει όλες τις γυναίκες ενώ η έννοια Άνθρωπος⊓¬Θηλυκό περιγράφει όλους τους άντρες. Επιπρόσθετα η περιγραφική έννοια Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό περιγράφει τους ανθρώπους που όλα τους τα παιδιά (αν υπάρχουν) είναι αρσενικά, ενώ η έννοια Άνθρωπος⊓∃εχειΠαιδι.⊤ περιγράφει τους ανθρώπους που έχουν τουλάχιστον ένα παιδί, δηλαδή του γονιούς. Τέλος μπορούμε να περιγράψουμε αυτούς που δεν έχουν κανένα παιδί ως Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.⊥.

Είναι πολύ σημαντικό στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι μέχρι στιγμής έχουμε περιγράψει μόνο τη σύνταξη της Περιγραφικής Λογικής $\mathcal{AL}$ ενώ δεν έχουμε αναφέρει τίποτα για τη σημασιολογία της. Σε μια φυσική γλώσσα, όπως είναι τα Ελληνικά, οι ερμηνείες των εννοιών είναι συνήθως συγκεκριμένες. Για παράδειγμα η ερμηνεία της έννοιας «άνθρωπος» αποτελεί την οντότητα αυτή που όλοι γνωρίζουμε μαζί με τα βιομετρικά χαρακτηριστικά που τη διακρίνουν. Μέλη της έννοιας αυτή είναι όλοι οι άνθρωποι του κόσμου. Αντίθετα όμως σε μια ΠΛ, όπως επίσης και σε οποιαδήποτε γλώσσα αναπαράστασης γνώσης όταν γράφουμε την έννοια «Άνθρωπος» αυτό δε σημαίνει αυτόματα ότι η έννοια αυτή έχει και ερμηνεία η οποία και είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων. Πιο συγκεκριμένα πρέπει εμείς να αποδώσουμε μια συγκεκριμένη ερμηνεία στην έννοια αυτή για να αποκτήσει κάποιο νόημα και σημασία. Ας δούμε λοιπόν πώς ορίζονται μαθηματικά οι ερμηνείες σε μια ΠΛ. Μια ΠΛ *ερμηνεία (interpretation)* $\mathcal{I}$ ορίζεται από ένα ζεύγος $(\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, όπου $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο που ονομάζεται *χώρος ερμηνείας (domain of interpretation)* και περιέχει στοιχεία που ονομάζονται *αντικείμενα (objects),* και $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μια *συνάρτηση ερμηνείας (interpretation function)* που ερμηνεύει κάθε ατομική έννοια A ως ένα υποσύνολο $A^{\mathcal{I}}$ του $\Delta^{\mathcal{I}}$ ($A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$) και κάθε ρόλο R ως ένα υποσύνολο $R^{\mathcal{I}}$ του $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ ($R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$). Τέλος η συνάρτηση ερμηνείας μπορεί να επεκταθεί για να δώσει ερμηνεία και σε περιγραφές εννοιών. Η σημασιολογία τους είναι η ακόλουθη:

$$\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$$

$$\bot^{\mathcal{I}} = \emptyset$$

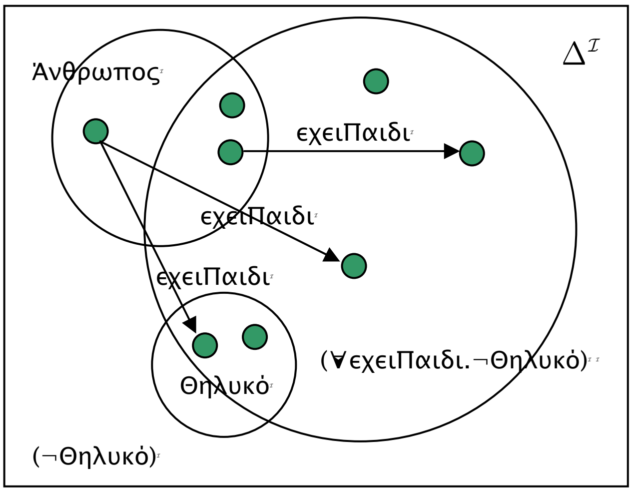
$$(\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}$$

$$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$$

$$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b \in \Delta^{\mathcal{I}}.\ (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\}$$

$$(\exists R.\top)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b \in \Delta^{\mathcal{I}}.\ (a,b) \in R^{\mathcal{I}}\}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό κάθε $\mathcal{AL}$ έννοια ερμηνεύεται ως ένα υποσύνολο του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Για παράδειγμα η έννοια $\top$ ερμηνεύεται ως το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα αντικείμενα του χώρου ερμηνείας, ενώ η έννοια $\perp$ ερμηνεύεται ως το κενό σύνολο, το οποίο και δικαιολογεί την ονομασία που τους έχουμε προσδώσει. Εν συνεχεία η έννοια $C \sqcap D$ ερμηνεύεται ως το σύνολο το οποίο προκύπτει από την τομή των ερμηνειών των εννοιών C και D. Επιπρόσθετα, η ερμηνεία της έννοιας $\forall R.C$ περιέχει το σύνολο των αντικειμένων του $\Delta^{\mathcal{I}}$ τα οποία αν συμμετέχουν στο ρόλο $R^{\mathcal{I}}$ με κάποιο άλλο αντικείμενο, τότε το αντικείμενο αυτό ανήκει στην ερμηνεία της έννοιας C δηλαδή στο σύνολο $C^{\mathcal{I}}$. Είναι πολύ σημαντικό στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι ένα αντικείμενο ανήκει στην ερμηνεία της έννοιας $\forall R.C$ ακόμα και αν δε σχετίζεται μέσω της σχέσης $R^{\mathcal{I}}$ με κανένα άλλο αντικείμενο. Έτσι λοιπόν, επιστρέφοντας στα παραδείγματά μας για τις έννοιες μιας οικογένειας έχουμε ότι και η ερμηνεία της έννοιας Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό αποτελεί ένα σύνολο του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Το σύνολο αυτό περιέχει τα αντικείμενα του $\Delta^{\mathcal{I}}$ τα οποία ανήκουν ταυτόχρονα στην ερμηνεία της έννοιας Άνθρωπος, δηλαδή στο σύνολο Άνθρωπος$^{\mathcal{I}}$, και αν συμμετέχουν στο ρόλο εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$ με κάποιο άλλο αντικείμενο, τότε το αντικείμενο αυτό δεν ανήκει στο σύνολο αυτό που εμείς έχουμε αποδώσει ως ερμηνεία της έννοιας Θηλυκό.



Σχήμα 1.1 *Γραφική αναπαράσταση της ερμηνείας της έννοιας* Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό

Στο σχήμα 4.1 φαίνεται διαισθητικά η ερμηνεία της προαναφερθείσας έννοιας. Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε τις ερμηνείες των εννοιών Άνθρωπος, Θηλυκό, ∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό και ¬Θηλυκό αλλά και του ρόλου εχειΠαιδι. Βλέπουμε ότι όλες αυτές οι έννοιες, ακόμα και η ∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό, ερμηνεύονται ως υποσύνολα του χώρου ερμηνείας $\Delta^{\mathcal{I}}$. Η ερμηνεία της έννοιας Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό είναι η τομή των συνόλων Άνθρωπος$^{\mathcal{I}}$ και (∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό)$^{\mathcal{I}}$. Παρατηρούμε επίσης ότι η ερμηνεία της έννοιας ∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό περιέχει και αντικείμενα τα οποία δε συνδέονται με κανένα άλλο αντικείμενο μέσω του ρόλου εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$. Επιπρόσθετα παρατηρούμε ότι τα αντικείμενα που ανήκουν στο σύνολο Άνθρωπος$^{\mathcal{I}}$ όχι όμως στην τομή με το σύνολο (∀εχειΠαιδι.¬Θηλυκό)$^{\mathcal{I}}$ είναι αυτά τα οποία έχουν τουλάχιστον μια σύνδεση με κάποιο αντικείμενο του συνόλου Θηλυκό$^{\mathcal{I}}$ μέσω της σχέσης εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$.

Από τα προηγούμενα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι έννοιες σε μια ΠΛ δεν επιδέχονται μοναδικής ερμηνείας. Αντίθετα μάλιστα υπάρχουν περιπτώσεις που μια έννοια μπορεί να έχει άπειρες ερμηνείες, αλλά και περιπτώσεις εννοιών όπου δεν υπάρχει καμία ερμηνεία που να τις ερμηνεύει ως μη κενές, όπως για παράδειγμα η έννοια Άνθρωπος⊓¬Άνθρωπος. Οι έννοιες αυτές ονομάζονται *μη-ικανοποιήσιμες (unsatisfiable)*.

Προσθέτοντας επιπλέον κατασκευαστές εννοιών στην απλή περιγραφική λογική $\mathcal{AL}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε περισσότερο εκφραστικές γλώσσες οι οποίες θα μας δίνουν τη δυνατότητα να περιγράφουμε πιο πολύπλοκες έννοιες. Πρώτα απ' όλα ας θεωρήσουμε τον κατασκευαστή ένωσης (union) (ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{U}$). Η σύνταξη της ένωση δυο εννοιών είναι η εξής C⊔D και η ερμηνεία της από τη συνάρτηση ερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ η ακόλουθη:

$$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$$

Για παράδειγμα με τη γλώσσα $\mathcal{ALU}$ μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια Πατέρας⊔Μητέρα που διαισθητικά περιγράφει την έννοια του γονιού.

Επιπρόσθετα είναι απολύτως φυσικό να επεκτείνουμε τον περιορισμένο υπαρξιακό περιορισμό στον *πλήρη υπαρξιακό περιορισμό* (ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{E}$). Η σύνταξη του είναι η ∃R.C ενώ η σημασιολογία του είναι η ακόλουθη:

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b \in \Delta^{\mathcal{I}}.\ (a,b) \in R^{\mathcal{I}} \text{ και } b \in C^{\mathcal{I}}\}.$$

Έτσι για παράδειγμα με τη γλώσσα $\mathcal{ALE}$ μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια των ανθρώπων που έχουν τουλάχιστον ένα παιδί που είναι κορίτσι ως, Άνθρωπος⊓∃εχειΠαιδι.Θηλυκό. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τη διαφορά μεταξύ των εννοιών ∃εχειΠαιδι.Θηλυκό και ∀εχειΠαιδι.Θηλυκό. Στην πρώτη περίπτωση ζητάμε την ύπαρξη τουλάχιστον ενός παιδιού που να είναι θηλυκό χωρίς να αποκλείουμε να υπάρχουν άλλα παιδιά που δεν είναι θηλυκά, ενώ στη δεύτερη περίπτωση απαιτούμε όλα τα παιδιά, αν αυτά υπάρχουν, να είναι θηλυκά.

Ένας άλλος κατασκευαστής εννοιών που χρησιμοποιείται αρκετά στις ΠΛ και αυξάνει σημαντικά την εκφραστικότητά τους είναι ο κατασκευαστής *περιορισμού πληθυκότητας (number restriction)*. Ο κατασκευαστής αυτός συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{N}$ και αποτελείται από δυο επιμέρους κατασκευαστές. Τον κατασκευαστή έννοιας *το-πολύ (at-most)*, ο οποίος έχει σύνταξη ≤nR και τον κατασκευαστή *το-λιγότερο (at-least)*, ο οποίος έχει σύνταξη ≥nR, όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και R ένας ρόλος. Διαισθητικά οι κατασκευαστές αυτοί ορίζουν έννοιες λαμβάνοντας υπόψη το πλήθος των συνδέσεων ενός αντικειμένου a με άλλα σε μια σχέση R. Πιο τυπικά η σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών είναι η ακόλουθη.

$$(\leq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{b \mid (a,b) \in R^{\mathcal{I}}\} \leq n\},$$

$$(\geq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{b \mid (a,b) \in R^{\mathcal{I}}\} \geq n\},$$

όπου με # συμβολίζεται η *πληθυκότητα (cardinality)* ενός συνόλου. Έτσι λοιπόν η ερμηνεία της έννοιας ≥nR περιλαμβάνει το σύνολο αυτών των αντικειμένων που συμμετέχουν στην ερμηνεία της σχέσης R το λιγότερο με n άλλα αντικείμενα. Χρησιμοποιώντας τους κατασκευαστές αυτούς μπορούμε να περιγράψουμε έννοιες όπως είναι η έννοια των ανθρώπων που έχουν ακριβώς ένα παιδί, Άνθρωπος⊓≥1εχειΠαιδι⊓≤1εχειΠαιδι. Αν τώρα συνδυάσουμε τον κατασκευαστή πληθυκότητας με τον κατασκευαστή ένωσης, και άρα έχουμε τη γλώσσα $\mathcal{ALUN}$ μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια των ανθρώπων που ή έχουν πολλά παιδιά όλα από τα οποία είναι θηλυκά ή έχουν λίγα όλα από τα οποία είναι αρσενικά ως,

Άνθρωπος⊓((≥3εχειΠαιδι⊓∀εχειΠαιδι.Θηλυκό)⊔(≤2εχειΠαιδι⊓∀εχειΠαιδι.Αρσενικό).

Στην περίπτωση που επιτρέπουμε μόνο την τιμή πληθυκότητας 1 ο κατασκευαστής ονομάζεται *συναρτησιακός περιορισμός πληθυκότητας (functional number restriction)* και η ύπαρξή του συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{F}$.

Όπως είναι φανερό ο κατασκευαστής αυτός εμφανίζει κάποιες αδυναμίες όσον αφορά το μέγεθος της εκφραστικότητας που μας προσφέρει. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια των ανθρώπων που έχουν πολλά θηλυκά παιδιά αφήνοντας ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχουν και άλλα παιδιά που είναι είτε θηλυκά είτε αρσενικά. Η αδυναμία αυτή ξεπερνάτε από μια απλή αλλά ταυτόχρονα ισχυρή επέκταση του κατασκευαστή αυτού. Ο νέος κατασκευαστής, ο οποίος συμβολίζεται με $\mathcal{Q}$ ονομάζεται *προσοντούχος περιοριστής πληθυκότητας (qualified number restriction ή qualified cardinality restriction)*. Η σύνταξη της μορφής το-πολύ είναι ≤nR.C, όπου n και R είναι όπως πριν ενώ C είναι μια οποιαδήποτε ΠΛ έννοια. Παρόμοια για τη μορφή το-λιγότερο. Η σημασιολογία του δίνεται από μια απλή επέκταση της σημασιολογίας του απλού περιοριστή πληθυκότητας και για την περίπτωση του το-πολύ είναι η ακόλουθη: $(\leq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{a\in\Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{b|(a,b)\in R^{\mathcal{I}}$ και $b\in C^{\mathcal{I}}\}\leq n\}$. Έτσι λοιπόν η προαναφερθείσα έννοια μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Άνθρωπος⊓(≥3εχειΠαιδι.Θηλυκό⊔≤2εχειΠαιδι.Αρσενικό).

Μια άλλη προφανής επέκταση που μπορούμε να κάνουμε είναι η επέκταση της άρνησης σε περίπλοκες έννοιες. Η ΠΛ που επιτρέπει αυτόν τον κατασκευαστή συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{C}$, η σύνταξή του είναι ¬C ενώ η σημασιολογία του δίνεται από την σχέση $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$. Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ μπορούμε για παράδειγμα να περιγράψουμε την έννοια των ανθρώπων που δεν έχουν παιδιά ως Άνθρωπος⊓¬(∃εχειΠαιδί.⊤), ή ως ¬(Πατέρας⊔Μητέρα) αν χρησιμοποιήσουμε ως πρωτογενείς έννοιες τις Πατέρας και Μητέρα αλλά επίσης και τον κατασκευαστή ένωσης.

Σε αυτό το σημείο ίσως έχει αρχίσει να γίνεται αντιληπτό ότι η εισαγωγή άρνησης σε μια ΠΛ κάνει κάποιες από τις προαναφερθείσες γλώσσες να μην είναι διακριτές μεταξύ τους. Για παράδειγμα για να περιγράψουμε την έννοια των ανθρώπων που δεν έχουν παιδιά χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα $\mathcal{AL}$ για να γράψουμε, Άνθρωπος⊓∀εχειΠαιδι.⊥, αντί για Άνθρωπος⊓¬(∃εχειΠαιδί.⊤). Επιπρόσθετα, κάποιος θα μπορούσε να περιγράψει την έννοια αυτή ως, ¬Πατέρας⊓¬Μητέρα αντί να χρησιμοποιήσει τον κατασκευαστή ένωσης για να γράψει ¬(Πατέρας⊔Μητέρα). Πιο τυπικά χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες DeMorgan, από τη θεωρία συνόλων, προκύπτουν οι ισοδυναμίες, C⊔D≡¬(¬C⊓¬D) και ∃R.C≡¬∀R.¬C. Έτσι λοιπόν οποτεδήποτε αναφερόμαστε στη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ θα θεωρούμε και την ύπαρξη των κατασκευαστών ένωσης και πλήρη υπαρξιακού περιορισμού χωρίς να χρειάζεται να ονομάζουμε τη γλώσσα $\mathcal{ALUEC}$. Παρομοίως ο κατασκευαστής $\mathcal{Q}$ έχει τέτοια εκφραστική δυνατότητα που μπορεί να περιγράψει τον πλήρη υπαρξιακό περιορισμό, καθώς η ακόλουθη ισοδυναμία ισχύει: $\exists R.C \equiv \geq 1 R.C$. Έτσι λοιπόν μπορούμε απλώς να γράψουμε $\mathcal{ALQ}$ υπονοώντας ουσιαστικά τους κατασκευαστές που ορίζονται από τη γλώσσα $\mathcal{ALEQ}$. Τέλος αξίζει να επισημάνουμε ότι ο κατασκευαστής $\mathcal{Q}$ έχει τη δυνατότητα να εκφράσει και τον κατασκευαστή του περιορισμού τιμής καθώς ισχύει $\forall R.C \equiv \leq 0 R.\neg C$.

2.1 Ορολογίες

Μέχρι στιγμής είδαμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κατασκευαστές που μας προσφέρει μια ΠΛ σε συνδυασμό με τις πρωτογενείς έννοιες και ρόλους με σκοπό τη δημιουργία πολύπλοκων εννοιών. Οι ΠΛ όμως μας προσφέρουν μια επιπλέον δυνατότητα αυτή του να μπορούμε να αποδίδουμε ονόματα στις περίπλοκες έννοιες που θέλουμε να περιγράψουμε, αλλά ακόμα και να περιγράφουμε σχέσεις ανάμεσα σε αυτές. Οι σχέσεις αυτές παρουσιάζονται με τη μορφή αξιωμάτων που ονομάζονται *αξιώματα ορολογίας (terminological axioms)*. Πιο συγκεκριμένα αν C και D είναι ΠΛ έννοιες τότε τα αξιώματα ορολογίας έχουν τη μορφή,

$$C \sqsubseteq D \quad \text{ή} \quad C \equiv D$$

Αξιώματα του πρώτου τύπου ονομάζονται *αξιώματα υπαγωγής (subsumption axioms ή inclusion axioms)* ενώ του δεύτερου τύπου ονομάζονται *αξιώματα ισοδυναμίας (equivalence axioms)*. Διαισθητικά ένα αξίωμα υπαγωγής της μορφής $C \sqsubseteq D$ δηλώνει ότι η έννοια D είναι πιο γενική από την έννοια C ή αλλιώς ότι η έννοια C είναι υπο-έννοια της D. Αντίστοιχα το αξίωμα $C \equiv D$ σημαίνει ότι οι δυο έννοιες είναι ταυτόσημες. Ένα σύνολο από αξιώματα υπαγωγής ή ισοδυναμίας αποτελούνε το *σώμα ορολογίας (TBox – Terminological Box)* ή απλώς μια *ορολογία (terminology)* η οποία συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{T}$.

Ας δούμε τώρα πως ερμηνεύονται τα αξιώματα ορολογίας. Σύμφωνα με τα παραπάνω εφόσον το αξίωμα $C \sqsubseteq D$ σημαίνει ότι η έννοια D είναι πιο γενική από την έννοια C και εφόσον τα C και D ερμηνεύονται σαν σύνολα είναι φυσικό να πούμε ότι μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ *ικανοποιεί (satisfies)* ένα αξίωμα υπαγωγής $C \sqsubseteq D$ αν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$, δηλαδή αν η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ερμηνεύει την έννοια D ως υπερσύνολο της έννοιας C. Αντίστοιχα μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα ισοδυναμίας $C \equiv D$ αν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Τέλος μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{T}$ αν ικανοποιεί όλα τα αξιώματα υπαγωγής και ισοδυναμίας που υπάρχουν στο $\mathcal{T}$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο (model)* του $\mathcal{T}$. Διαισθητικά μια ορολογία $\mathcal{T}$ αποτελεί έναν περιορισμό στη δομή των μοντέλων που μπορούν να οριστούν. Για παράδειγμα ένα αξίωμα της μορφής $C \sqsubseteq D \sqcap E$ σημαίνει ότι σε όλες τις ερμηνείες οι οποίες ικανοποιούν το αξίωμα, το σύνολο $C^{\mathcal{I}}$ πρέπει να είναι υποσύνολο της τομής των συνόλων $D^{\mathcal{I}}$ και $E^{\mathcal{I}}$ ανεξάρτητα με την ερμηνεία που θα αποδώσουμε ατομικά στις έννοιες C, D και E.

Το TBox λοιπόν μας δίνει τη δυνατότητα να ονομάσουμε τις πολύπλοκες έννοιές μας. Για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι η έννοια Πατέρας$\sqcup$Μητέρα περιγράφει ακριβώς την έννοια του γονιού γράφοντας, Γονιός$\equiv$Πατέρας$\sqcup$Μητέρα. Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να μην μπορούμε να δώσουμε ακριβή ορισμό για μια έννοιά. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση υπαγωγής ανάμεσα στις έννοιες. Για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι η τίγρης είναι ένα είδος ζώου γράφοντας, Τίγρης$\sqsubseteq$Ζώο. Οι σχέσεις υπαγωγής είναι αρκετά σημαντικές καθώς μας επιτρέπουν τη δημιουργία ιεραρχιών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι τόσο οι έννοιες στο αριστερό αλλά και στο δεξί μέρος των αξιωμάτων ορολογίας μπορούν να είναι οποιαδήποτε περίπλοκη έννοια. Έτσι λοιπόν μπορούμε να γράψουμε το αξίωμα

∃εχειΠαιδί.⊤⊓Υγιής⊑Ευτυχισμένος, που δηλώνει ότι αν έχεις παιδί και έχεις και την υγεία σου τότε είσαι και ευτυχισμένος, αλλά ακόμα περισσότερο μπορούμε να ορίσουμε αξιώματα που περιέχουν *κύκλους (cycles)*, όπως για παράδειγμα το αξίωμα ΔυαδικόΔέντρο≡Δέντρο⊓≤2εχειΚλαδι⊓∃εχειΚλαδι.ΔυαδικόΔέντρο που ορίζει τη δομή δεδομένων δυαδικό δέντρο. Τα αξιώματα της πρώτης μορφής ονομάζονται *υπαγωγές γενικών εννοιών (general concept inclusions – GCIs)* ή *γενικευμένα αξιώματα (general axioms)*. Στον πίνακα 4.2 φαίνεται ένα παράδειγμα TBox με αξιώματα για την περιγραφή μιας οικογένειας.

Πίνακας 4.2 *TBox οικογένειας*

Γυναίκα	≡	Άνθρωπος⊓Θηλυκό
Άντρας	≡	Άνθρωπος⊓¬Γυναίκα
Μητέρα	≡	Γυναίκα⊓∃εχειΠΑιδι.Άνθρωπος
Πατέρας	≡	Άντρας⊓∃εχειΠΑιδι.Άνθρωπος
Γονιός	≡	Πατέρας⊔Μητέρα
Πολύτεκνος	≡	Γονιός⊓≥3εχειΠαιδι

2.2 Ισχυρισμοί

Έκτος από τη δυνατότητα ορισμού σχέσεων μεταξύ εννοιών οι ΠΛ μας επιτρέπουν να κάνουμε και υποθέσεις όσον αφορά τα άτομα του κόσμου τον οποίο μοντελοποιούμε. Μας δίνει δηλαδή τη δυνατότητα καθορισμού *σχέσεων στιγμιοτύπου (instance relations)* ανάμεσα σε ένα άτομο (ζευγάρι ατόμων) και μια έννοια (ρόλο), τα οποία ονομάζονται *ισχυρισμοί (assertions)*. Υπάρχουν λοιπόν δυο είδη ισχυρισμών, οι *ισχυρισμοί εννοιών (concept assertions)*, που έχουν τη σύνταξη a:C ή C(a), και οι *ισχυρισμοί ρόλων (role assertion)* που έχουν τη σύνταξη (a,b):R ή R(a,b). Αν λοιπόν θεωρήσουμε ως άτομα το Μιχάλης, Ντόρα και Γιώργος, μπορούμε να κάνουμε ισχυρισμούς πάνω στις έννοιες και τους ρόλους που εισάγαμε στο TBox της οικογένειας, όπως Γονιός(Ντόρα), εχειΠαιδι(Ντόρα, Μιχάλης) και Άντρας(Γιώργος). Το σύνολο των ισχυρισμών αποτελεί το *σώμα ισχυρισμών (ABox – Assertional Box)* το οποίο συμβολίζεται με $\mathcal{A}$. Έτσι λοιπόν μια ΠΛ *βάση γνώσης (knowledge base)* ορίζεται ως ένα ζευγάρι ενός TBox $\mathcal{T}$ και ενός ABox $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}=(\mathcal{T},\mathcal{A})$.

Όπως με κάθε στοιχείο μιας ΠΛ γλώσσας έτσι και οι ισχυρισμοί χρειάζονται να ερμηνευτούν. Για το σκοπό αυτό η συνάρτηση ερμηνείας επεκτείνεται αντιστοιχίζοντας ένα άτομο a σε ένα αντικείμενο $a^{\mathcal{I}}$ του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε τη διαφορά μεταξύ ατόμου και αντικειμένου. Τα άτομα ως στοιχεία του αλφάβητου μιας ΠΛ γλώσσας χρειάζεται να ερμηνευτούν για να αποκτήσουν συγκεκριμένο νόημα. Έτσι λοιπόν το άτομο Γιώργος δεν αντιπροσωπεύει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο σε κάποιο κόσμο. Αν θέλουμε να ερμηνεύσουμε το άτομο Γιώργος πρέπει να ορίσουμε τον κόσμο μας (το $\Delta^{\mathcal{I}}$) και να αναθέσουμε ένα αντικείμενο του κόσμου ως ερμηνεία του ατόμου Γιώργος.

Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί έναν ισχυρισμό a:C ((a,b):R) αν $a^{\mathcal{I}}\in C^{\mathcal{I}}$ ($(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}})\in R^{\mathcal{I}}$), ενώ ικανοποιεί ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί όλους τους ισχυρισμούς που βρίσκονται στο $\mathcal{A}$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$. Στα σώματα ισχυρισμών έχουμε έναν επιπλέον ορισμό ο οποίος είναι αρκετά σημαντικός. Λέμε ότι μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ *με βάση το* (μβτ) σώμα ορολογίας $\mathcal{T}$ αν η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$ αλλά και ταυτόχρονα μοντέλο του $\mathcal{T}$.

3. Υπηρεσίες Εξαγωγής Συμπερασμάτων

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή μας ένα σύστημα το οποίο μπορεί μόνο να αποθηκεύει γνώση σε κάποια μορφή δε συνεπάγεται απαραίτητα και τη δημιουργία ενός ευφυούς συστήματος. Για να μπορέσουμε να δημιουργήσουμε τέτοιες εφαρμογές θα πρέπει να δίνεται η δυνατότητα να εξάγουμε συμπεράσματα βασισμένοι στη γνώση την οποία έχουμε περιγράψει. Μέχρι στιγμής έχουμε δει πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα σώματα ορολογίας και ισχυρισμών των ΠΛ για τη δημιουργία βάσεων γνώσης. Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις *υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων (inference services)* που μας παρέχουν οι ΠΛ. Επιπρόσθετα θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο όλες οι υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων μπορούν να αναχθούν σε μια μόνο υπηρεσία, καθώς επίσης πώς υπηρεσίες που ορίζονται με βάση ένα TBox μπορούν να αναχθούν σε υπηρεσίες μβτ κενό TBox. Όπως γίνεται αντιληπτό και οι δυο αυτοί μηχανισμοί είναι πολύ σημαντικοί καθώς αφενός αν υλοποιήσουμε έναν αλγόριθμο που λύνει την υπηρεσία στην οποία οι άλλες ανάγονται τότε έχουμε υλοποιήσει έναν αλγόριθμο για όλες και αφετέρου εξαλείφοντας το TBox ο αλγόριθμος απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό.

3.1 Υπηρεσίες Σωμάτων Ορολογίας

Οι ΠΛ παρέχουν υπηρεσίες τόσο πάνω στα σώματα ορολογίας όσο και στα σώματα ισχυρισμών. Ας ξεκινήσουμε από το σώμα ορολογίας. Έστω $\mathcal{T}$ ένα TBox.

- **Ικανοποιησιμότητα (satisfiability):** Η έννοια C είναι *ικανοποιήσιμη (satisfiable)* μβτ $\mathcal{T}$ αν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}\neq\emptyset$.

- **Υπαγωγή (subsumption):** Η έννοια C υπάγεται στην έννοια D (subsumed by) μβτ $\mathcal{T}$ αν $C^{\mathcal{I}}\sqsubseteq D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\mathcal{T}\models C\sqsubseteq D$.

- **Ισοδυναμία (equivalence):** Η έννοια C είναι ισοδύναμη με την έννοια D μβτ $\mathcal{T}$ αν $C^{\mathcal{I}}=D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\mathcal{T}\models C\equiv D$.

- **Ξένες Έννοιες (disjointness):** Η έννοια C είναι *ξένη* με την έννοια D *(disjoint with)* μβτ $\mathcal{T}$ αν $C^{\mathcal{I}}\cap D^{\mathcal{I}}=\emptyset$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$.

Παρατηρήστε πως διαφέρει το πρόβλημα την ικανοποιησιμότητας από τα υπόλοιπα προβλήματα. Διαισθητικά στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας αναζητούμε αν μια έννοια C έχει φυσική υπόσταση με βάση τα αξιώματα που περιγράφονται σε ένα TBox, άρα μας ενδιαφέρει ακόμα και μια ερμηνεία στην οποία το «νόημα» της να μην είναι κενό. Αντίθετα για να δούμε αν μια έννοια υπάγεται σε μια άλλη πρέπει να δούμε όλα τα μοντέλα του $\mathcal{T}$. Προφανώς στα προηγούμενα προβλήματα το TBox μπορεί να είναι κενό.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Οι παρακάτω προτάσεις ισχύουν:

1. Άντρας$\sqcap\neg$Άντρας δεν είναι ικανοποιήσιμη μβτ κενό TBox.

2. Άντρας$\sqcap$Γυναίκα είναι ικανοποιήσιμη μβτ κενό TBox.

3. Άντρας$\sqcap$Γυναίκα δεν είναι ικανοποιήσιμη μβτ TBox του πίνακα 4.2.

4. $\exists$εχειΠαιδι.Αρσενικό$\sqcap\exists$εχειΠαιδι.$\neg$Αρσενικό είναι ικανοποιήσιμη μβτ κενό TBox.

5. $\forall$εχειΠαιδι.Αρσενικό$\sqcap\forall$εχειΠαιδι.$\neg$Αρσενικό είναι ικανοποιήσιμη μβτ κενό TBox.

6. Η έννοια Μητέρα δεν υπάγεται στην έννοια Γονιός μβτ κενό TBox.

7. Μητέρα$\sqsubseteq$Γονιός μβτ TBox $\mathcal{T}$ του πίνακα 4.2.

Η πρώτη περίπτωση είναι προφανής καθώς δεν μπορεί να βρεθεί ερμηνεία τέτοια ώστε ένα αντικείμενο να ανήκει ταυτόχρονα σε ένα σύνολο και στο συμπλήρωμά του. Στη δεύτερη περίπτωση, καθώς δεν έχουμε κάποια γνώση ότι ο άντρας και η γυναίκα είναι ξένες έννοιες (αφού το ερώτημα είναι μβτ κενό TBox) η έννοια αυτή είναι ικανοποιήσιμη. Για την τρίτη περίπτωση, από τα αξιώματα του πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι ο Άντρας έχει οριστεί ως η τομή του Ανθρώπου και του συμπληρώματος της έννοιας Γυναίκα. Έτσι λοιπόν σε όλα τα μοντέλα του TBox του πίνακα 4.2 τα σύνολα Άντρας$^{\mathcal{I}}$ και Γυναίκα$^{\mathcal{I}}$ είναι ξένα μεταξύ τους. Στην περίπτωση 4 μπορούμε να φτιάξουμε το μοντέλο $(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}})\in$εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$, $(a^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in$εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$, $b^{\mathcal{I}}\in$Αρσενικό$^{\mathcal{I}}$, $c^{\mathcal{I}}\notin$Αρσενικό$^{\mathcal{I}}$. Για την έννοια της περίπτωσης 5, όπως αναφέραμε και στην ενότητα που είδαμε τη σημασιολογία της έννοιας $\forall$R.C ένα αντικείμενο $a^{\mathcal{I}}$ ανήκει στο σύνολο $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}$ ακόμα και αν το $a^{\mathcal{I}}$ δε συνδέεται μέσω της $R^{\mathcal{I}}$ με κανένα άλλο αντικείμενο. Έτσι λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε ένα αντικείμενο που ανήκει στην έννοια και δεν έχει κανένα παιδί. Η περίπτωση 6 είναι παρόμοια με την περίπτωση 2. Εφόσον δεν έχουμε κάποια γνώση που να μας επιβάλει το σύνολο Μητέρα$^{\mathcal{I}}$ να είναι υποσύνολο του συνόλου Γονιός$^{\mathcal{I}}$ σε όλα τα μοντέλα, τότε μπορούμε να φτιάξουμε μια ερμηνεία στην οποία το σύνολο Μητέρα$^{\mathcal{I}}$ να είναι υπερσύνολο του συνόλου Γονιός$^{\mathcal{I}}$. Στην περίπτωση 7 από τα αξιώματα του πίνακα 4.2 σε κάθε μοντέλο του TBox η ερμηνεία της έννοιας Γονιός ορίζεται ως η ένωση των ερμηνειών Μητέρα και Πατέρας.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή της ενότητας αυτής όλες οι υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων μπορούν να αναχθούν σε ακριβώς μια και πιο συγκεκριμένα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα της μη-ικανοποιησιμότητας (unsatisfiability) (Donini et. al., 1994). Πιο συγκεκριμένα αν η ΠΛ περιέχει άρνηση τότε έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

- Η έννοια C υπάγεται στην έννοια D αν και μόνο αν (ανν) η έννοια $C\sqcap\neg D$ είναι μη-ικανοποιήσιμη.

- Η έννοιες C και D είναι ισοδύναμες ανν και οι δυο έννοιες $C\sqcap\neg D$ και $\neg C\sqcap D$ είναι μη-ικανοποιήσιμες.

- Οι έννοιες C και D είναι ξένες μεταξύ τους ανν η έννοια $C\sqcap D$ είναι μη-ικανοποιήσιμη.

Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε αν ισχύει $\exists R.C\sqcap\exists R.D\sqcap\leq 1R\sqsubseteq\exists R.(C\sqcap D)$ μβτ κενό TBox. Τότε μετασχηματίζουμε το ερώτημα υπαγωγής στην ικανοποιησιμότητα της έννοιας $\exists R.C\sqcap\exists R.D\sqcap\leq 1R\sqcap\neg(\exists R.(C\sqcap D))$ μβτ κενό TBox. Χρησιμοποιώντας τώρα την ισοδυναμία μεταξύ του $\exists$ και του $\forall$ που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα η παραπάνω έννοια μπορεί να γραφτεί ως, $\exists R.C \sqcap \exists R.D \sqcap \leq 1R \sqcap (\forall R.\neg(C \sqcap D))$, η οποία εν συνεχεία χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία μεταξύ του κατασκευαστή $\sqcap$ και $\sqcup$ μπορεί να γραφτεί ως $\exists R.C \sqcap \exists R.D \sqcap \leq 1R \sqcap (\forall R.(\neg C \sqcup \neg D))$.

3.2 Υπηρεσίες Σωμάτων Ισχυρισμών

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στα σώματα ισχυρισμών. Έστω $\mathcal{A}$ ένα ABox και $\mathcal{T}$ ένα TBox.

- **Συνέπεια (consistency):** Το $\mathcal{A}$ είναι *συνεπές (consistent)* μβτ $\mathcal{T}$ αν υπάρχει μοντέλο του $\mathcal{T}$ το οποίο είναι και μοντέλο του $\mathcal{A}$.
- **Συνεπαγωγή (entailment):** Το $\mathcal{A}$ *συνεπάγεται (entails)* έναν ισχυρισμό φ μβτ $\mathcal{T}$, αν κάθε μοντέλο του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{T}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\mathcal{T},\mathcal{A} \models \varphi$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν:

1. Το ABox $\mathcal{A}$={Άντρας(Γιώργος), Γυναίκα(Γιώργος)} είναι συνεπές μβτ κενό TBox.
2. Το παραπάνω ABox δεν είναι συνεπές μβτ TBox του πίνακα 4.2.
3. Έστω $\mathcal{A}$={εχειΠαιδι(Πέτρος,Γιώργος), Άντρας(Γιώργος)}. Τότε $\mathcal{A} \models$Πέτρος:∃εχειΠαιδι.Άντρας μβτ κενό TBox.
4. Έστω το προηγούμενο ABox. Τότε το $\mathcal{A}$ δε συνεπάγεται τον ισχυρισμό Πέτρος:∀εχειΠαιδι.Άντρας μβτ κενό TBox.

Όπως είδαμε στα παραδείγματα ικανοποιησιμότητας εννοιών η έλλειψη πληροφορίας για τις έννοιες Άντρας και Γυναίκα συνεπάγεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τουλάχιστον μια (στην πραγματικότητα μπορούμε άπειρες) ερμηνεία όπου οι ερμηνείες των εννοιών αυτών να έχουν κοινά αντικείμενα. Αρκεί να αντιστοιχίσουμε το άτομο Γιώργος σε ένα από αυτά τα αντικείμενα. Με την εισαγωγή τώρα της γνώσης του TBox του πίνακα 4.2 το παραπάνω ABox δεν είναι πια συνεπές καθώς οι έννοιες είναι πλέον ξένες μεταξύ τους. Ας δούμε την περίπτωση 3. Σε κάθε μοντέλο του ABox θα ισχύει ότι (Πέτρος$^{\mathcal{I}}$,Γιώργος$^{\mathcal{I}}$)∈εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$ και Γιώργος$^{\mathcal{I}}$∈Άντρας$^{\mathcal{I}}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ισχυρισμοί του ABox. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μοντέλο του ABox υπάρχει ένα αντικείμενο του $\Delta^{\mathcal{I}}$ που να συμμετέχει στη σχέση εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$ με το Πέτρος$^{\mathcal{I}}$ και ταυτόχρονα το αντικείμενο αυτό να ανήκει στο σύνολο Άντρας$^{\mathcal{I}}$ δηλαδή στην ερμηνεία της έννοιας Άντρας. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση 4. Όπως αναλύσαμε στην περίπτωση 3 το ABox μας εγγυάται την ύπαρξη ενός αντικειμένου για το οποίο ισχύουν οι παραπάνω ισχυρισμοί. Αυτό όμως δε αποκλείει την περίπτωση σε μια ερμηνεία εκτός από το αντικείμενο αυτό να υπάρχουν και άλλα που ενώ συμμετέχουν στη σχέση εχειΠαιδι$^{\mathcal{I}}$ με το Πέτρος$^{\mathcal{I}}$ να μη συμμετέχουν στο σύνολο Άντρας$^{\mathcal{I}}$. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι τα ABoxes αποτελούνε μια αφαίρεση ενός μόνο κομματιού (τμήματος) του κόσμου μας και ποτέ δεν αντιπροσωπεύουν ολόκληρο τον κόσμο. Άρα αν κάποιος ισχυρισμός δε βρίσκεται μέσα στο ABox αυτό δε σημαίνει ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει αλλά ότι δεν ξέρουμε αν ισχύει και ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε ερμηνείες στις οποίες ο ισχυρισμός αυτό να ικανοποιείται και άλλες στις οποίες μπορεί να μην ικανοποιείται. Η υπόθεση αυτή ονομάζεται *υπόθεση ανοικτού κόσμου (open-world assumption)*.

Όπως και στην περίπτωση των προβλημάτων των σωμάτων ορολογιών έτσι και στην περίπτωση των προβλημάτων των σωμάτων ισχυρισμών όλα τα προβλήματα και πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα της συνεπαγωγής μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας ενός ABox. Έτσι λοιπόν έχουμε $\mathcal{A}\models\varphi$ μβτ TBox $\mathcal{T}$ ανν το $\mathcal{A}\cup\{\neg\varphi\}$ είναι ασυνεπές (inconsistent) μβτ $\mathcal{T}$. Αυτή η αναγωγή μπορεί να γίνει αντιληπτή ως εξής. Αν το $\mathcal{A}\cup\{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές μβτ $\mathcal{T}$, δηλαδή αν μπορέσουμε να βρούμε μια ερμηνεία που να ικανοποιεί τους ισχυρισμούς του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{T}$ αλλά ταυτόχρονα και τον ισχυρισμό $\neg\varphi$ τότε θα έχουμε βρει μια ερμηνεία που να είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{T}$ και να μην ικανοποιεί τον ισχυρισμό φ. Τέλος το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας έννοιας C μβτ $\mathcal{T}$ μπορεί και αυτό να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας ενός ABox $\mathcal{A}$ μβτ $\mathcal{T}$. Πιο συγκεκριμένα το C είναι ικανοποιήσιμο μβτ $\mathcal{T}$ ανν το $\mathcal{A}=\{C(a)\}$ είναι συνεπές μβτ $\mathcal{T}$, όπου a είναι ένα καινούργιο άτομο. Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι το πρόβλημα της υπαγωγής μιας έννοιας σε μια άλλη δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη και τους ισχυρισμούς ενός ABox (Nebel, 1990a).

3.3 Εξάλειψη του Σώματος Ορολογίας

Όπως έχουμε δει μέχρι στιγμής όλα τα ενδιαφέροντα ερωτήματα γίνονται πάντα με βάση κάποιο TBox $\mathcal{T}$. Αυτό γιατί το TBox αυτό αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της γνώσης μας το οποίο μας θέτει περιορισμούς στα πιθανά μοντέλα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των εννοιών του Άντρα και της Γυναίκας. Όπως είδαμε ένα TBox μπορεί να περιλαμβάνει περίπλοκα αξιώματα. Για παράδειγμα οι έννοιες που ορίζουν μια άλλη έννοια μπορούν και αυτές να έχουν ορισμούς σε κάποιο άλλο σημείο του TBox. Μπορεί επίσης να έχουμε αξιώματα με κύκλους αλλά και υπαγωγές γενικών εννοιών. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι με ποιον τρόπο μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας τη γνώση που μας περιγράφει ένα TBox; Στη συνέχεια θα δούμε ότι εφαρμόζοντας μια προ-επεξεργασία πάνω σε ένα TBox μπορούμε να το εξαλείψουμε πλήρως και να ανάγουμε τα προβλήματα μας μβτ κενό TBox.

Οι διαδικασίες που εφαρμόζονται για την απαλοιφή ενός TBox χωρίζονται σε δυο κατηγορίες ανάλογα με το είδος των αξιωμάτων που περιέχονται μέσα σε αυτό. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε δυο είδη TBox. Τα *απλά (simple)* TBox και τα *γενικευμένα (general)* και/ή *κυκλικά (cyclic)*. Τα απλά TBox περιέχουν μόνο αξιώματα της μορφής $A\sqsubseteq C$ και $A\equiv C$, όπου A είναι μια πρωτογενής έννοια και C είναι μια οποιαδήποτε ΠΛ έννοια. Τα γενικευμένα TBox είναι αυτά που περιέχουν αξιώματα GCI, δηλαδή $C\sqsubseteq D$, ενώ κυκλικά είναι αυτά που τα αξιώματά τους περιέχουν κύκλούς. Για παράδειγμα τα TBox $\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D,\ D\sqsubseteq E,\ E\sqsubseteq C\}$ και $\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\sqcap\exists R.C\}$ περιέχουν και τα δυο κύκλους.

Η διαδικασία που εφαρμόζουμε σε ένα απλό TBox ονομάζεται *ξεδίπλωμα (unfolding)* ή *επέκταση (expansion)* (Nebel, 1990b). Η διαδικασία αυτή λειτουργεί ως εξής: Κάθε αξίωμα υπαγωγής της μορφής $A\sqsubseteq C$ αντικαθίσταται από ένα αξιώματα ισοδυναμίας της μορφής $A\equiv A'\sqcap C$, όπου A′ είναι μια νέα πρωτογενής έννοια που δεν εμφανίζεται πουθενά στο $\mathcal{T}$. Διαισθητικά η έννοια αυτή αναπαριστά τα χαρακτηριστικά εκείνα που ξεχωρίζουν την έννοια A από τα υπόλοιπα μέλη της έννοιας C. Στη συνέχεια αν η έννοια C είναι μια πολύπλοκη έννοια, που σχηματίζεται από επιμέρους πρωτογενής έννοιες, ανατρέχουμε το TBox ψάχνοντας για τον ορισμό των εννοιών αυτών αντικαθιστώντας τους στη θέση στην οποία βρίσκονται στο C. Η επέκταση ενός TBox $\mathcal{T}$ συμβολίζεται με $\mathcal{T}'$.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το TBox $\mathcal{T}$={Γυναίκα⊑Άνθρωπος, Άντρας≡Άνθρωπος⊓¬Γυναίκα} και ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία επέκτασης. Το πρώτο αξίωμα δε μας καθορίζει πλήρως την έννοια Γυναίκα. Έτσι λοιπόν το αντικαθιστούμε με το αξίωμα ισοδυναμίας $\text{Γυναίκα}\equiv\text{Γυναίκα}'\sqcap\text{Άνθρωπος}$. Αν κοιτάξουμε την αναλογία αυτού του αξιώματος με αυτά του πίνακα 4.2 θα δούμε διαισθητικά ότι η έννοια Γυναίκα' θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί στην έννοια Θηλυκό και άρα είναι αυτό το οποίο έλλειπε για να καθοριστεί η έννοια Γυναίκα πλήρως. Προχωρώντας βλέπουμε ότι η έννοια Άντρας ορίζεται από την πρωτογενή έννοια Άνθρωπος και την έννοια Γυναίκα η οποία και ορίζεται κάπου αλλού στο TBox. Έτσι λοιπόν αντικαθιστούμε τον ορισμό της και λαμβάνουμε το αξίωμα $\text{Άντρας}\equiv\text{Άνθρωπος}\sqcap\neg(\text{Γυναίκα}'\sqcap\text{Άνθρωπος})$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η διαδικασία επέκτασης ενός TBox μπορεί να οδηγήσει σε ένα νέο TBox που είναι εκθετικά μεγαλύτερο από το αρχικό TBox (Nebel, 1990b). Μια τέτοια ορολογία είναι η $\mathcal{T}=\{C_i=\forall R.C_{i+1}\sqcap\forall S.C_{i+1}\}$ για $1\leq i\leq n-1$. Παρόλα αυτά υπάρχουν τεχνικές στις οποίες το ξεδίπλωμα του TBox γίνεται μόνον όταν αυτό χρειάζεται πράγμα το οποίο μας οδηγεί σε αλγορίθμους που χρειάζονται πολυωνυμικό χώρο σε σχέση με το αρχικό TBox. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *αργό ξεδίπλωμα (lazy unfolding)* και οφείλεται στον Lutz (1999). Συνοψίζοντας, αν θέλουμε να ελέγξουμε τη ικανοποιησιμότητα της έννοιας $\text{Άντρας}\sqcap\text{Γυναίκα}$ μβτ TBox $\mathcal{T}$ του πίνακα 4.2, επεκτείνουμε το TBox και τέλος αντικαθιστούμε τους ορισμούς των εννοιών Άντρας και Γυναίκα στην προηγούμενη έννοια. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή λαμβάνουμε την έννοια έννοιας, $\text{Άνθρωπος}\sqcap\neg(\text{Άνθρωπος}\sqcap\text{Θηλυκό})\sqcap(\text{Άνθρωπος}\sqcap\text{Θηλυκό})$. Αντί τώρα να ελέγξουμε την ικανοποιησιμότητα της αρχικής έννοιας μβτ TBox του πίνακα 4.2 ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα της έννοιας αυτής μβτ κενό TBox.

Ας ασχοληθούμε τώρα με τα γενικευμένα και τα κυκλικά TBox. Όπως είναι προφανές στα TBox αυτά δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επέκτασης καθώς στην περίπτωση κυκλικών αξιωμάτων αυτή δε θα τελείωνε ποτέ, ενώ στην περίπτωση των υπαγωγών γενικών εννοιών για πολλές έννοιες μπορεί να μην έχουμε τους ορισμούς τους. Η περίπτωση αυτών των TBox αντιμετωπίζεται με μια διαδικασία που ονομάζεται *εσωτερίκευση (internalization)* (Baader, 1991). Εν συντομία η μέθοδος αυτή κωδικοποιεί τους σημασιολογικούς περιορισμούς που περιγράφονται από τα αξιώματα υπαγωγής και ισοδυναμίας σε μια και μοναδική έννοια. Στη συνέχεια παίρνει το συνδυασμό των εννοιών και τέλος σχηματίζει ένα και μοναδικό γενικευμένο αξίωμα το οποίο ο αλγόριθμος μπορεί να χειριστεί αποδοτικά.

Έστω το αξίωμα $C\sqsubseteq D$. Γενικά μπορούμε πολύ εύκολα να αντιληφθούμε ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο του κόσμου μας $a^{\mathcal{I}}$ είτε θα συμβαίνει το $a^{\mathcal{I}}$ να ανήκει στο σύνολο $C^{\mathcal{I}}$ είτε το $a^{\mathcal{I}}$ να μην ανήκει στο σύνολο αυτό άρα να ανήκει στο συμπλήρωμα του $(\neg C)^{\mathcal{I}}$. Στην πρώτη περίπτωση για να ικανοποιεί η ερμηνεία $\mathcal{I}$ το αξίωμα υπαγωγής θα πρέπει το $C^{\mathcal{I}}$ να είναι υποσύνολο του $D^{\mathcal{I}}$ άρα λοιπόν θα πρέπει το $a^{\mathcal{I}}$ να ανήκει και στο σύνολο $D^{\mathcal{I}}$. Εφόσον αυτό πρέπει να ισχύει για όλες τις ερμηνείες που ικανοποιούν το αξίωμα, μπορούμε να αφαιρεθούμε από αυτές και να γράψουμε γενικά ότι $C\sqsubseteq D$ ανν κάθε άτομο a ανήκει ή στην έννοια $\neg C$ ή στην έννοια D, άρα δηλαδή στην έννοια $\neg C\sqcup D$. Έτσι λοιπόν ένα γενικευμένο και/ή κυκλικό TBox της μορφής $\mathcal{T}=\{C_i\sqsubseteq D_i\}$ για $1\leq i\leq n$ μετασχηματίζεται στην έννοια $C_{\mathcal{T}}\equiv(\neg C_1\sqcup D_1)\sqcap(\neg C_2\sqcup D_2)\sqcap\ldots\sqcap(\neg C_n\sqcup D_n)$. Τα αξιώματα της μορφής $C\equiv D$ αντιμετωπίζονται ως δυο αξιώματα της μορφής $C\sqsubseteq D$ και $D\sqsubseteq C$. Τέλος δημιουργούμε το γενικευμένο αξίωμα $\top\sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$ για να υποδηλώσουμε ότι οι παραπάνω περιορισμοί πρέπει να εφαρμοστούν σε όλα τα άτομα του κόσμου μας. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε ένα απλό TBox.

Έστω για παράδειγμα το TBox $\mathcal{T}$={$C \sqcup D \sqsubseteq E$}. Η έννοια C υπάγεται στην έννοια E μβτ $\mathcal{T}$; Προφανώς η απάντηση είναι καταφατική καθώς σε κάθε μοντέλο του $\mathcal{T}$ η ερμηνεία της E θα περιλαμβάνει την ένωση των ερμηνειών της C και D. Ας δούμε όμως πως λειτουργεί η μέθοδος. Η εσωτερικευμένη μορφή του TBox είναι η εξής: $\top \sqsubseteq \neg(C \sqcup D) \sqcup E$. Εφαρμόζοντας τους κανόνες DeMorgan η έννοια του δεξιού μέλους μπορεί να μετασχηματιστεί σε $(\neg C \sqcap \neg D) \sqcup E$. Στη συνέχεια ανάγουμε την υπαγωγή στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας της έννοιας $C \sqcap \neg E$ και τέλος ανάγουμε αυτό στο πρόβλημα της συνέπειας του ABox {$a{:}C \sqcap \neg E$}. Λόγω του γενικευμένου αξιώματος που προέκυψε από τη διαδικασία εσωτερίκευσης σε επόμενο βήμα το ABox μετασχηματίζεται στο {$a{:}C \sqcap \neg E$, $a{:}(\neg C \sqcap \neg D) \sqcup E$}. Αν εξετάσουμε προσεκτικά το ABox αυτό θα δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε ερμηνεία που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τους ισχυρισμούς αυτούς. Πιο συγκεκριμένα για να ικανοποιείται ο ισχυρισμός $a{:}C \sqcap \neg E$ θα πρέπει να ισχύει $a^{\mathcal{I}} \in (C \sqcap \neg E)^{\mathcal{I}}$. Αν βασιστούμε στη σημασιολογία του κατασκευαστή $\sqcap$ τότε καταλήγουμε ότι πρέπει $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ και $a^{\mathcal{I}} \in (\neg E)^{\mathcal{I}}$. Επίσης όμως λόγω του δεύτερου ισχυρισμού πρέπει είτε $a^{\mathcal{I}} \in (\neg E)^{\mathcal{I}}$, το οποίο έρχεται σε σύγκρουση με τους προηγούμενους περιορισμούς, ή $a^{\mathcal{I}} \in (\neg C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $a^{\mathcal{I}} \in (\neg C)^{\mathcal{I}}$ και $a^{\mathcal{I}} \in (\neg D)^{\mathcal{I}}$ το οποίο επίσης έρχεται σε σύγκρουση με τους αρχικούς περιορισμούς. Άρα λοιπόν το ABox δεν είναι συνεπές και η έννοια C υπάγεται στην έννοια D. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση της εσωτερίκευσης που δείξαμε δεν έχουμε εξαλείψει πλήρως το TBox αλλά έχουμε ένα αξίωμα. Ουσιαστικά αυτό το αξίωμα μας λέει ποιους περιορισμούς πρέπει να εφαρμόσουμε στα άτομα του κόσμου μας. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα σε πιο εκφραστικές ΠΛ ακόμα και αυτό το μοναδικό αξίωμα μπορεί να εξαλειφθεί τελείως.

4. Μηχανισμοί Εξαγωγής Συμπερασμάτων

Έχοντας παρουσιάσει τη σύνταξη, τη σημασιολογία και τις υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων αρκετών ΠΛ, αυτό που μας μένει είναι η εύρεση ενός αυτοματοποιημένου τρόπου (αλγορίθμου) που να μας λύνει το πρόβλημα της συνέπειας και άρα μεταβατικά οποιοδήποτε πρόβλημα μιας ΠΛ γλώσσας. Στην τρέχουσα ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν τέτοιο αλγόριθμο.

Ήδη από προηγούμενα παραδείγματά μας ίσως έχει αρχίσει να γίνεται αντιληπτό που θα βασιστεί μια τέτοια *διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων ή διαδικασία συμπερασμών (inference procedure)* ή αλλιώς *αλγόριθμος συλλογιστικής (reasoning algorithm)*. Για παράδειγμα στην ενότητα με τις γενικευμένες ορολογίες για να αποδείξουμε ότι το σώμα ισχυρισμών {$a{:}C \sqcap \neg E$, $a{:}(\neg C \sqcap \neg D) \sqcup E$} είναι ασυνεπές βασιστήκαμε στη σημασιολογία των κατασκευαστών $\neg$, $\sqcap$ και $\sqcup$ και προσπαθήσαμε απλοποιώντας τις περίπλοκες έννοιες που εμφανίζονται στους ισχυρισμούς να χτίσουμε μια ερμηνεία που να τους ικανοποιεί, ένα μοντέλο δηλαδή. Οι αλγόριθμοι οι οποίο αποδεικνύουν την ικανοποιησιμότητα ή μη μιας έκφρασης με το να απλοποιούν περίπλοκες εκφράσεις έως ότου φτάσουν σε απλές των οποίων η ικανοποιησιμότητά ή μη είναι προφανής ονομάζονται *αλγόριθμοι πινάκων (tableaux algorithms)*.

Προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση ενός τέτοιου αλγορίθμου για τις ΠΛ γλώσσες που έχουμε παρουσιάσει ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε αν ισχύει, $\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqsubseteq \forall R.(C \sqcap D)$. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα το ερώτημα αυτό ανάγεται σταδιακά πρώτα στο πρόβλημα ικανοποιησιμότητας της έννοιας $\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqcap \neg(\forall R.(C \sqcap D))$ και στη συνέχεια στο πρόβλημα της συνέπειας του ABox {$a{:}\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqcap \neg(\forall R.(C \sqcap D))$}. Επιπρόσθετα, για να απλοποιήσουμε τις εργασίες μας ξαναγράφουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό χρησιμοποιώντας τους κανόνες DeMorgan αλλά και την ισοδυναμία μεταξύ των τελεστών $\exists$ και $\forall$ ως, $\{a{:}\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqcap \exists R.(\neg C \sqcup \neg D)\}$. Ας εργαστούμε πάνω σε αυτόν τον ισχυρισμό. Προφανώς για να είναι το ABox ικανοποιήσιμο θα πρέπει να ισχύει $a^{\mathcal{I}} \in (\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqcap \exists R.(\neg C \sqcup \neg D))^{\mathcal{I}}$. Η σημασιολογία του κατασκευαστή $\sqcap$ μας επιβάλει επιπλέον να ισχύουν τα $a^{\mathcal{I}} \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$, $a^{\mathcal{I}} \in (\forall R.D)^{\mathcal{I}}$ και $a^{\mathcal{I}} \in (\exists R.(\neg C \sqcup \neg D))^{\mathcal{I}}$. Ακολούθως η σχέση $a^{\mathcal{I}} \in (\exists R.(\neg C \sqcup \neg D))^{\mathcal{I}}$ μας λέει ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο $b^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$ και $b^{\mathcal{I}} \in (\neg C \sqcup \neg D)^{\mathcal{I}}$. Στη συνέχεια λόγω των σχέσεων $a^{\mathcal{I}} \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$, $a^{\mathcal{I}} \in (\forall R.D)^{\mathcal{I}}$ και της σημασιολογίας του περιοριστή τιμής μας επιβάλεται επιπλέον να ισχύουν για το $b^{\mathcal{I}}$ οι σχέσεις $b^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ και $b^{\mathcal{I}} \in D^{\mathcal{I}}$. Τέλος παρατηρούμε ότι η σχέση $b^{\mathcal{I}} \in (\neg C \sqcup \neg D)^{\mathcal{I}}$ μας λέει ότι το $b^{\mathcal{I}}$ πρέπει να ανήκει είτε στο $b^{\mathcal{I}} \in (\neg C)^{\mathcal{I}}$ είτε στο $b^{\mathcal{I}} \in (\neg D)^{\mathcal{I}}$. Οποιαδήποτε και από τις δυο επιλογές όμως και αν διαλέξουμε ερχόμαστε σε σύγκρουση με τους περιορισμούς ότι το $b^{\mathcal{I}}$ πρέπει να ανήκει και στο $C^{\mathcal{I}}$ και στο $D^{\mathcal{I}}$. Εφόσον λοιπόν δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μοντέλο το ABox είναι ασυνεπές και άρα η έννοια $\forall R.C \sqcap \forall R.D$ υπάγεται στην έννοια $\forall R.(C \sqcap D)$. Στην πραγματικότητα ισχύει η πιο ισχυρή σχέση $\forall R.C \sqcap \forall R.D \equiv \forall R.(C \sqcap D)$.

4.1 Tableaux κανόνες για την $\mathcal{ALC}$

Ας προχωρήσουμε τώρα στον ορισμό μιας tableaux διαδικασίας που να αποφασίζει το πρόβλημα της συνέπειας για ένα $\mathcal{ALC}$ σώμα ισχυρισμών. Αρχικά, όπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα, οι αλγόριθμοι αυτοί δεν μπορούν να χειριστούν έννοιες οι οποίες περιλαμβάνουν άρνηση μπροστά από περίπλοκες έννοιες, όπως συνέβη στην περίπτωση της έννοιας $\neg(\forall R.(C \sqcap D))$. Πρέπει λοιπόν όλες αυτές οι έννοιες να ξαναγραφτούν έτσι ώστε η άρνηση να εμφανίζεται μόνο μπροστά από πρωτογενείς έννοιες. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η αρχική έννοια βρίσκεται σε *κανονική μορφή άρνησης - ΚΜΑ (negation normal form - NNF)* (Hollunder et. al., 1990). Για την παραγωγή της μορφής NNF χρησιμοποιούμε για ακόμα μια φορά τους κανόνες DeMorgan καθώς επίσης και την ισοδυναμία μεταξύ των τελεστών $\forall$ και $\exists$ σπρώχνοντας τον τελεστή της άρνησης προς το εσωτερικό των εννοιών. Πιο συγκεκριμένα για τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ έχουμε τους παρακάτω κανόνες επανεγγραφής:

$$\neg\top \equiv \bot \qquad\qquad \neg\bot \equiv \top$$

$$\neg\neg C \equiv C$$

$$\neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D \qquad\qquad \neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D$$

$$\neg(\forall R.C) \equiv \exists R.\neg C \qquad\qquad \neg(\exists R.C) \equiv \forall R.\neg C$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ένα σώμα ισχυρισμών μπορεί να περιέχει ισχυρισμούς ανάμεσα σε ένα άτομο a και μια περίπλοκή έννοια, όπως ήταν η έννοια $\forall R.C \sqcap \forall R.D \sqcap \neg(\forall R.(C \sqcap D))$. Προκειμένου να απλοποιήσουμε περίπλοκες έννοιες της μορφής αυτής χρειαζόμαστε να δημιουργήσουμε κανόνες οι οποίοι θα τις αποσυνθέτουν. Οι κανόνες αυτοί θα πρέπει να βασίζονται στη σημασιολογία των κατασκευαστών της γλώσσας. Στον πίνακα 4.3 φαίνονται οι κανόνες οι οποίοι απαιτούνται για τον έλεγχο τη συνέπεια ενός $\mathcal{ALC}$ ABox (Schmidt-Schauss M., & Smolka G., 1991). Όπως γίνεται αντιληπτό από τον πίνακα υπάρχει ακριβώς ένας κανόνας για κάθε κατασκευαστή της ΠΛ γλώσσας $\mathcal{ALC}$. Όπως θα δούμε όμως στη συνέχεια υπάρχουν περιπτώσεις που απαιτείται η παρουσία περισσοτέρων του ενός κανόνων για να έχουμε μια ορθή και πλήρης διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων.

Πίνακας 4.3 T*ableaux Κανόνες για τη γλώσσα* $\mathcal{ALC}$

Κανόνας	Περιγραφή
κανόνας–⊓	Αν a:C⊓D∈$\mathcal{A}$ και οι ισχυρισμοί a:C και a:D δεν υπάρχουν στο $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A}$'→$\mathcal{A}$∪{a:C, a:D}.
κανόνας–⊔	Αν a:C⊔D∈$\mathcal{A}$ και δεν υπάρχει έστω και ένας από τους ισχυρισμούς a:C και a:D} στο $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A}$'→$\mathcal{A}$∪{a:C}, $\mathcal{A}$''→$\mathcal{A}$∪{a:D}.
κανόνας–∀	Αν {a:∀R.C, (a,b):R}⊆$\mathcal{A}$ και δεν υπάρχει ο ισχυρισμός b:C στο $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A}$'→$\mathcal{A}$∪{b:C}.
κανόνας–∃	Αν a:∃R.C∈$\mathcal{A}$ και δεν υπάρχει άτομο b τέτοιο ώστε τα (a,b):R και b:C να ανήκουν στο $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A}$'→$\mathcal{A}$∪{(a,b):R, b:C}, όπου b είναι ένα νέο άτομο που δεν εμφανίζεται πουθενά στο $\mathcal{A}$.

Τέλος, στο προηγούμενό μας παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε την έννοια της σύγκρουσης για να δηλώσουμε ότι δυο περιορισμοί έρχονται σε αντίθεση και άρα το αρχικό μας σώμα ισχυρισμών δεν είναι συνεπές. Τυπικά, ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ περιέχει μια *σύγκρουση (clash)* αν συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα:

- {⊥(x)}⊆$\mathcal{A}$ για κάποιο άτομο x, ή
- {A(x), ¬A(x)}⊆$\mathcal{A}$ για κάποιο άτομο x και πρωτογενή έννοια A.

Από τους κανόνες του πίνακα 4.3 βλέπουμε ότι η εφαρμογή του κανόνα-⊔ δημιουργεί περισσότερα του ενός νέα σώματα ισχυρισμών. Για το λόγο αυτό ο κανόνας ονομάζεται και *μη-ντετερμινιστικός (non-deterministic)*. Έτσι λοιπόν η συνεχόμενη εφαρμογή κανόνων μπορεί να οδηγήσει από ένα αρχικό σώμα $\mathcal{A}$ σε ένα σύνολο σωμάτων ισχυρισμών $\mathcal{S}=\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n\}$. Όπως είναι προφανές το αρχικό σώμα ισχυρισμών είναι συνεπές ανν κάποιο από τα $\mathcal{A}_i$ είναι συνεπές.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου tableaux. Έστω το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$={(Ντόρα,Γιώργος):εχειΦιλο, (Ντόρα,Χριστίνα):εχειΦιλο, (Χριστίνα, Γιώργος):εχειΦιλο, (Γιώργος,Τάσος):εχειΦιλο, Χριστίνα:Αθλητής, Τάσος:¬Αθλητής}. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ρωτήσουμε αν η Ντόρα έχει κάποιο φίλο που είναι αθλητής και ο οποίος έχει κάποιο φίλο που δεν είναι αθλητής. Το ερώτημα αυτό μπορεί να γραφτεί ως, $\mathcal{A}$⊨{Ντόρα:∃εχειΦιλο.(Αθλητής⊓∃εχειΦιλο.¬Αθλητής)}. Ρίχνοντας μια ματιά στο ABox θα μπορούσε κάποιος να συμπεράνει ότι το ABox δε συνεπάγεται τον ισχυρισμό. Αυτό γιατί η Ντόρα έχει φίλο τη Χριστίνα που είναι αθλητής όμως η Χριστίνα έχει μοναδικό φίλο το Γιώργο ο οποίος δεν ξέρουμε αν είναι αθλητής, ενώ από την άλλη η Ντόρα έχει επίσης φίλο το Γιώργο ο οποίος και πάλι δε γνωρίζουμε αν είναι αθλητής. Ας εφαρμόσουμε όμως τους κανόνες tableaux να δούμε τι θα μας δώσει η διαδικασία μας. Αρχικά το πρόβλημα συνεπαγωγής ανάγεται στο πρόβλημα της συνέπειας του ABox:

$\mathcal{A}_1$= $\mathcal{A}$∪{Ντόρα:¬∃εχειΦιλο.(Αθλητής⊓∃εχειΦιλο.¬Αθλητής)}

Στη συνέχεια υπολογίζοντας την NNF μορφή της παραπάνω έκφρασης λαμβάνουμε το ABox $\mathcal{A}_1$=$\mathcal{A}$∪{Ντόρα:∀εχειΦιλο.(¬Αθλητής⊔∀εχειΦιλο.Αθλητής)}. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες του πίνακα 4.3 έως ότου κανένας κανόνας να μην μπορεί να εφαρμοστεί ή έχουμε συναντήσει σύγκρουση (clash). Αρχικά έχουμε ότι οι ισχυρισμοί (Ντόρα, Γιώργος):εχειΦιλο, (Ντόρα, Χριστίνα):εχειΦιλο υπάρχουν στο $\mathcal{A}_1$ άρα ο κανόνας-∀ εφαρμόζεται στο άτομο Ντόρα και λαμβάνουμε το νέο ABox:

$\mathcal{A}_2$=$\mathcal{A}_1$∪{Γιώργος:¬Αθλητής⊔∀εχειΦιλο.Αθλητής,
Χριστίνα:¬Αθλητής⊔∀εχειΦιλο.Αθλητής}.

Σε επόμενο βήμα ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος επιλέγει να ελέγξει ποιος κανόνας εκτελείται πάνω στο άτομο Χριστίνα. Ο κανόνας που εκτελείται είναι ο κανόνας-⊔. Ο κανόνας αυτός δημιουργεί δυο δυνατά σώματα ισχυρισμών τα οποία είναι τα $\mathcal{A}_{3a}$=$\mathcal{A}_2$∪{Χριστίνα:¬Αθλητής} και $\mathcal{A}_{3b}$=$\mathcal{A}_2$∪{Χριστίνα:∀εχειΦιλο.Αθλητής}. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε το ABox $\mathcal{A}_{3a}$ περιέχει σύγκρουση (clash) καθώς {Χριστίνα:¬Αθλητής, Χριστίνα:Αθλητής}⊆$\mathcal{A}_{3a}$. Το $\mathcal{A}_{3b}$ όμως δεν περιέχει clash και γι αυτό η εκτέλεση των κανόνων προχωράει. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο κανόνας-∀ στο άτομο Χριστίνα, ο οποίος δημιουργεί το νέο ABox, $\mathcal{A}_{4b}$={Γιώργος:Αθλητής}. Σε επόμενο βήμα ο μόνος κανόνας που εκτελείται είναι ο κανόνας-⊔ στο άτομο Γιώργος λόγω του ισχυρισμού Γιώργος:¬Αθλητής⊔∀εχειΦιλο.Αθλητής. Η εφαρμογή του κανόνα δημιουργεί τα ABox, $\mathcal{A}_{5ba}$={Γιώργος:¬Αθλητής} και $\mathcal{A}_{5bb}$={Γιώργος:∀εχειΦιλο.Αθλητής}. Πάλι παρατηρούμε ότι το $\mathcal{A}_{5ba}$ περιέχει σύγκρουση λόγω του ισχυρισμού Γιώργος:Αθλητής που έχει εισαχθεί σε προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου. Τέλος, εφαρμόζουμε τον κανόνα-∀ στο άτομο Γιώργος λόγω του ισχυρισμού Γιώργος:∀εχειΦιλο.Αθλητής και λαμβάνουμε το νέο σώμα ισχυρισμών, $\mathcal{A}_{6bb}$={Τάσος:Αθλητής} το οποίο περιέχει σύγκρουση ανάμεσα στον ισχυρισμό Τάσος:Αθλητής και στον αρχικό ισχυρισμό, Τάσος:¬Αθλητής. Άρα λοιπόν όλα τα σώματα ισχυρισμών που προκύπτουν από την εφαρμογή των κανόνων οδηγούνται σε σύγκρουση και άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το αρχικό ABox είναι ασυνεπές. Αυτό λοιπόν σημαίνει ότι η αρχική μας γνώση συνεπάγεται τον ισχυρισμό για την Ντόρα.

Όπως παρατηρούμε καταλήξαμε σε διαφορετικό αποτέλεσμα από αυτό που αρχικά φανταστήκαμε. Το λάθος στην αρχική μας συλλογιστική βρίσκεται στις θεωρήσεις μας για τη συμμετοχή του ατόμου Γιώργος στην έννοια Αθλητής. Όπως αναφέραμε στην ενότητα για τα γενικευμένα αξιώματα κάθε άτομο ανήκει είτε στην έννοια Αθλητής είτε στην έννοια ¬Αθλητής. Στην περίπτωση που ο Γιώργος είναι αθλητής η Ντόρα έχει ως φίλο αθλητή το Γιώργο ο οποίος έχει ως φίλο που δεν είναι αθλητής τον Τάσο. Στην περίπτωση που ο Γιώργος δεν είναι αθλητής η Ντόρα έχει σαν φίλο που είναι αθλητής τη Χριστίνα η οποία έχει ως φίλο που δεν είναι αθλητής το Γιώργο. Έτσι λοιπόν σε κάθε περίπτωση η Ντόρα έχει κάποιο φίλο που είναι αθλητής και ο οποίος έχει φίλο ο οποίος δεν είναι αθλητής. Η διαδικασία συλλογιστικής αυτού του τύπου ονομάζεται *συλλογιστική υπό συνθήκες (reasoning by cases)*.

Σε αυτό το σημείο ίσως αναρωτηθεί κάποιος πως μετράται το αν ένας αλγόριθμος tableaux είναι σωστός ή όχι. Στις ΠΛ όπως και σε όλες τις γλώσσες αναπαράστασης γνώσης, αυτό μετράται από δυο μεγέθη. Το πρώτο ονομάζεται *ορθότητα (soundness)* ενώ το δεύτερο ονομάζεται *πληρότητα (completeness)*. Ένας αλγόριθμος tableaux είναι ορθός αν οποτεδήποτε απαντάει ότι ένα σώμα ισχυρισμών είναι συνεπές τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για αυτό, δηλαδή το σώμα ισχυρισμών είναι όντως συνεπές. Τέλος ένας αλγόριθμος tableaux είναι πλήρης αν δοθέντος ενός αρχικού συνεπούς σώματος ισχυρισμών ο αλγόριθμος τερματίζει και τουλάχιστον ένα από τα σώματα ισχυρισμών που δημιουργήθηκαν $\mathcal{S}=\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ δεν περιέχει συγκρούσεις.

4.2 Επιπλέον tableaux κανόνες για την $\mathcal{ALCQ}$

Μέχρι στιγμής είδαμε ένα μηχανισμό εξαγωγής συμπερασμάτων για τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$. Ας προχωρήσουμε τώρα σε πιο εκφραστικές γλώσσες όπως είναι η γλώσσα $\mathcal{ALCQ}$. Αρχικά οι κανόνες επανεγραφής που ορίστηκαν για την $\mathcal{ALC}$ πρέπει να επεκταθούν με τους ακόλουθους κανόνες.

$$\neg(\geq nR.C) \equiv \leq(n-1)R.C,\ n\geq 1 \qquad \neg(\geq 0R.C) \equiv \bot$$

$$\neg(\leq nR.C) \equiv \geq(n+1)R.C$$

Επιπρόσθετα για τους νέους κατασκευαστές, που υπενθυμίζουμε ότι είναι ο περιορισμός το-πολυ και το-λιγότερο, έχουμε τους κανόνες του πίνακα 4.4

Πίνακας 4.4 Επιπλέον t*ableaux Κανόνες για τη γλώσσα* $\mathcal{ALCQ}$

Κανόνας	**Περιγραφή**
κανόνας–$\geq$	Αν $a{:}\geq nR.C\in\mathcal{A}$ και δεν υπάρχουν άτομα $y_1,\ldots,y_n$ τέτοια ώστε τα $(a,y_i){:}R$, $1\leq i\leq n$ $y_i{:}C$ και $y_i\neq y_j$ $1\leq i<j\leq n$ να βρίσκονται στο $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A}'\rightarrow\mathcal{A}\cup\{(a,y_i){:}R,\ y_i{:}C \mid 1\leq i\leq n\}\cup\{y_i\neq y_j\ 1\leq i<j\leq n\}$, όπου τα $y_1,\ldots,y_n$ είναι νέα άτομα που δεν υπάρχουν μέσα στο $\mathcal{A}$.
κανόνας–$\leq$	Αν $a{:}\leq nR.C\in\mathcal{A}$ και υπάρχουν n+1 άτομα $y_1,\ldots,y_{n+1}$ τέτοια ώστε τα $(a,y_i){:}R$, $1\leq i\leq n$ $y_i{:}C$ υπάρχουν στο $\mathcal{A}$ όμως η σχέση $y_i\neq y_j$ δεν υπάρχει για κάποιο ζευγάρι y_i και y_j στο $\mathcal{A}$, τότε για κάθε ζευγάρι y_i και y_j τέτοιο ώστε i<j και η σχέση $y_i\neq y_j$ δεν υπάρχει στο $\mathcal{A}$, το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}_{i,j}$ προκύπτει από το $\mathcal{A}$ αν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις του ατόμου y_i με το άτομο y_j.
Κανόνας επιλογής	Αν $a{:}\leq nR.C\in\mathcal{A}$ και υπάρχει b τέτοιο ώστε ο ισχυρισμός (a,b):R βρίσκεται στο $\mathcal{A}$, όμως δεν υπάρχει κάποιος από τους ισχυρισμούς b:C ή $b{:}\neg C$, τότε τότε $\mathcal{A}'\rightarrow\mathcal{A}\cup\{b{:}C\}$, $\mathcal{A}''\rightarrow\mathcal{A}\cup\{b{:}\neg C\}$.

Οι παραπάνω κανόνες χρειάζονται κάποιες διευκρινήσεις. Καταρχάς παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμός χρειάζεται να κρατάει μια επιπλέον σχέση μεταξύ των ατόμων που βρίσκονται μέσα στο ABox. Η σχέση αυτή συμβολίζεται με $\neq$ και μας λέει αν δυο άτομα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Στην αρχή του αλγορίθμου η σχέση αυτή αρχικοποιείται ως, $a\neq b$ για όλα τα άτομα a, b που βρίσκονται αρχικά στο σώμα ισχυρισμών. Αυτή η υπόθεση ισοδυναμεί με την *υπόθεση μοναδικότητας των ονομάτων (unique names assumption)*. Η επέκταση αυτή είναι πολύ απλή γι αυτό το λόγο, πολλές φορές, οι ΠΛ μας παρέχουν γενικά τη δυνατότητα ορισμού σχέσων ισότητας (=) ή ανισότητας ($\neq$) ανάμεσα σε άτομα. Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα ισότητας a=b αν $a^{\mathcal{I}}=b^{\mathcal{I}}$, ενώ ικανοποιεί ένα αξίωμα ανισότητας a≠b αν $a^{\mathcal{I}}\neq b^{\mathcal{I}}$.

Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι έχουμε δυο επιπλέον μη-ντετερμινιστικούς κανόνες. Ο πρώτος είναι ο κανόνας-≤ ο οποίος μας λέει ότι για κάθε ζευγάρι ατόμων y_i και y_j για τα οποία δε γνωρίζουμε ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους πρέπει να δημιουργήσουμε ένα νέο σώμα ισχυρισμών που να «ενώνει» τα άτομα αυτά με σκοπό ο ισχυρισμός που ενεργοποίησε τον κανόνα να ισχύει. Έστω για παράδειγμα το $\mathcal{A}$={a:≤2R.C, (a,b):R, b:C, (a,c):R, c:C, (a,d):R, d:C}. Εφόσον έχουμε παραπάνω από δυο άτομα y τέτοια ώστε (a,y):R και y:C και κανένα από αυτά δεν είναι διαφορετικό με κάποιο άλλο θα πάρουμε όλες τις δυνατές «ενώσεις» ανά δυο έως ότου ο ισχυρισμός περιορισμού πληθυκότητας ισχύει. Πιο συγκεκριμένα θα δημιουργηθούν τα σώματα $\mathcal{A}_{ab}$ $\mathcal{A}_{ac}$ και $\mathcal{A}_{bc}$ τα οποία ενώνουν το a με το b, το a με το c και το b με το c. Τέλος οι συνθήκες συγκρούσεων πρέπει να επεκταθούν με την επιπλέον συνθήκη: Το $\mathcal{A}$ περιέχει σύγκρουση αν a:≤nR.C∈$\mathcal{A}$ και υπάρχουν n+1 άτομα $y_1,\ldots,y_{n+1}$ τέτοια ώστε τα (a,y_i):R, $1\leq i\leq n$ y_i:C και $y_i\neq y_j$ $1\leq i<j\leq n$ να βρίσκονται στο $\mathcal{A}$.

Ο δεύτερος, ονομάζεται κανόνας επιλογής και χωρίς αυτόν ο αλγόριθμός μας θα ήταν *μη-ορθός (unsound)* (Tobies, 2001). Ας δούμε με ένα παράδειγμα γιατί κάτι τέτοιο συμβαίνει αν αυτός ο κανόνας δε ληφθεί υπόψη. Έστω το σώμα ισχυρισμών: $\mathcal{A}$={a:≥3R.⊤, a:≤1R.B, a:≤1R.¬B}. Ας εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τον κανόνα επιλογής. Αρχικά εφαρμόζεται ο κανόνας–≥ ο οποίος δημιουργεί τρία άτομα τέτοια ώστε (a,y_i):R, y_i:⊤ για $1\leq i\leq 3$ και $y_i\neq y_j$ $1\leq i<j\leq 3$. Στη συνέχει ο αλγόριθμος τερματίζει καθώς δεν υπάρχουν περισσότερα από 1 άτομα y_i στο $\mathcal{A}$ για τα οποία είτε να ισχύει (a,y_i):R και y_i:B είτε (a,y_i):R και y_i:¬B και άρα ούτε ο κανόνας-≤ βρίσκει εφαρμογή αλλά ούτε και κάποια συνθήκη σύγκρουσης. Αν προσπαθήσουμε όμως να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο από το τελικό σώμα ισχυρισμών που έχουμε κατασκευάσει θα δούμε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο και άρα ο αλγόριθμος μας είναι μη-ορθός. Το λάθος στην προηγούμενη διαδικασία είναι ότι για τα y_i υπάρχουν «κρυμμένοι» περιορισμοί τους οποίους δε λάβαμε υπόψη και οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην εφαρμογή ή μη του κανόνα-≤. Η πληροφορία αυτή δεν είναι άλλη παρά η γνωστή μας συλλογιστική υπό συνθήκες η οποία μας λέει ότι για κάθε y_i είτε θα ισχύει y_i:B είτε y_i:¬B. Άρα λοιπόν ο κανόνας επιλογής εισάγει ακριβώς αυτήν την πληροφορία η οποία είναι ουσιαστικής σημασίας για την εφαρμογή ή μη του κανόνα-≤. Όπως είναι προφανές εφόσον τα y_i είναι τρία στο πλήθος τότε για δυο από αυτά είτε θα ισχύει y_i:B είτε y_i:¬B. Και στις δυο περιπτώσεις η νέα συνθήκη σύγκρουσης βρίσκει εφαρμογή και άρα καταλήγουμε ότι το αρχικό σώμα ισχυρισμών είναι *ασυνεπές (inconsistent)*.

Τελειώνοντας ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα. Έστω το σώμα ισχυρισμών: $\mathcal{A}$={(a,a):R, a:≤1R.⊤, a:∃R.C, a:∀R.(∃R.C)}. Ας δούμε βηματικά την εκτέλεση των κανόνων των πινάκων 4.3 και 4.4. Αρχικά εφαρμόζεται ο κανόνας-∃ στο άτομο a για να εισαχθεί ένα νέο άτομο x, και να δημιουργηθεί το νέο σώμα ισχυρισμών: $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}\cup${(a,x):R, x:C}. Ακολούθως ο κανόνας-∀ εφαρμόζεται στο a, και άρα επιπλέον έχουμε $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_1\cup${x:∃R.C}. Στη συνέχει και πάλι ο κανόνας-∃ μπορεί να εφαρμοστεί στο x και να προκύψει το νέο σώμα ισχυρισμών: $\mathcal{A}_3=\mathcal{A}_2\cup${(x,y):R, y:C}. Τέλος εφόσον το άτομο a συνδέεται με δυο άτομα μέσω της σχέσης R ο κανόνας-≤ βρίσκει εφαρμογή. Στην προκειμένη περίπτωση ο κανόνας αυτός θα αντικαταστήσει τις εμφανίζεις του ατόμου x με το άτομο a. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε το σώμα ισχυρισμών: $\mathcal{A}_{3ax}$ το οποίο και περιέχει τους ισχυρισμούς a:C, (a,y):R, a:(∃R.C), αντί των ισχυρισμών (x,y):R, x:∃R.C και x:C. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι το ABox $\mathcal{A}_{3ax}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το ABox $\mathcal{A}_2$ με τη μόνη διαφορά ότι το $\mathcal{A}_{3ax}$ έχει τον επιπλέον ισχυρισμό a:C. Συνεχίζοντας λοιπόν την εκτέλεση των κανόνων μπορούμε να καταλήξουμε σε μια άπειρη ακολουθία δημιουργίας ίδιων σωμάτων ισχυρισμών η οποία δε θα τερματίσει ποτέ. Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται πολλές φορές και ως το πρόβλημα του *γιο-γιο (yo-yo effect)*. Για να διορθώσουμε την αδυναμία αυτή εργαζόμαστε ως εξής. Αναθέτουμε στους κανόνες προτεραιότητες. Πιο συγκεκριμένα οι κανόνες οι οποίοι δεν δημιουργούν νέα άτομα, δηλαδή οι κανόνες-(∀, ≤, ⊓ και ⊔) εκτελούνται με μεγαλύτερη προτεραιότητα από τους κανόνες-(∃ και ≥). Αυτή η αλλαγή έχει την ακόλουθη επίδραση πάνω στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο κανόνας-∃ δε θα εφαρμοστεί στο άτομο x καθώς ο κανόνας-≤ είναι επίσης εφαρμόσιμος. Έτσι λοιπόν θα λάβουμε το σώμα, $\mathcal{A}_{2ax}$. Σε αυτήν την περίπτωση ο κανόνας-∃ δε βρίσκει πλέον εφαρμογή καθώς το a έχει το άτομο a (τον εαυτό του δηλαδη) για το οποίο ισχύουν τα (a,a):R, a:C, και άρα ο ισχυρισμός a:∃R.C ικανοποιείται.

4.3 Γενικευμένες και κυκλικές Ορολογίες

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα θεωρήσαμε ότι είτε το σώμα ορολογίας είχε επεκταθεί και οι ορισμοί των εννοιών είχαν αντικατασταθεί στους ισχυρισμούς του ABox είτε ότι κάποιο τέτοιο σώμα ορολογίας δεν υπήρχε. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν εφαρμόσουμε τους ανωτέρω tableaux κανόνες σε μια ορολογία που περιλαμβάνει γενικευμένα και/ή κυκλικά αξιώματα.

Έστω η κυκλική ορολογία $\mathcal{T}$={A⊑∃R.A} και έστω ότι ζητάμε να βρούμε αν η έννοια A είναι ικανοποιήσιμη μβτ $\mathcal{T}$. Προφανώς η έννοια αυτή είναι ικανοποιήσιμη και μια δυνατή ερμηνεία που την ικανοποιεί είναι η $\Delta^{\mathcal{I}}=\{a^{\mathcal{I}}\}$ με $A^{\mathcal{I}}=\{a^{\mathcal{I}}\}$ και $R^{\mathcal{I}}=\{(a^{\mathcal{I}},a^{\mathcal{I}})\}$. Ας δούμε τώρα πώς θα εργαστεί ο αλγόριθμός μας. Αρχικά εφαρμόζουμε τη διαδικασία εσωτερίκευσης η οποία μας ανάγει την παραπάνω ορολογία στην ορολογία $\mathcal{T}'$ ={⊤⊑¬A⊔∃R.A}. Ακολούθως για να ελέγξουμε αν η έννοια A είναι ικανοποιήσιμη ανάγουμε το πρόβλημα αυτό στο πρόβλημα της συνέπειας του σώματος ισχυρισμών $\mathcal{A}$={b:A} όπου b είναι ένα τυχαίο άτομο. Λόγω του αξιώματος υπαγωγής έχουμε επιπλέον τον ισχυρισμό, b: ¬A⊔∃R.A. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες του πίνακα 4.3 και έχουμε τα εξής: Ο κανόνας-⊔ εκτελείται και μας δημιουργεί τα σώματα ισχυρισμών $\mathcal{A}_{1a}=\mathcal{A}\cup$\{b:¬A} και $\mathcal{A}_{1b}=\mathcal{A}\cup$\{b:∃R.A}. Το σώμα $\mathcal{A}_{1a}$ περιέχει σύγκρουση άρα συνεχίζουμε μόνο με το δεύτερο. Ο κανόνας-∃ εφαρμόζεται στο b και άρα έχουμε $\mathcal{A}_{2b}=\mathcal{A}_{1b}\cup$\{(b,x):R, x:A}. Λόγω του αξιώματος ⊤⊑¬A⊔∃R.A μας επιβάλλεται να ισχυριστούμε ότι και για το νέο άτομο x θα ισχύει x:¬A⊔∃R.A. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για το άτομο x θα δημιουργήσουμε πάλι τα σώματα ισχυρισμών, $\mathcal{A}_{3ba}=\mathcal{A}\cup$\{x:¬A} και $\mathcal{A}_{3bb}=\mathcal{A}\cup$\{x:∃R.A} από τα οποία το πρώτο περιλαμβάνει σύγκρουση ενώ στο δεύτερο η εκτέλεση κανόνων συνεχίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως και στο άτομο b. Έτσι λοιπόν παρατηρούμε για ακόμα μια φορά ότι η διαδικασία μας εμφανίζει προβλήματα τερματισμού.

Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά τους ισχυρισμούς που μας εισάγει ο αλγόριθμος στα τελευταία βήματα θα διαπιστώσουμε ότι ουσιαστικά δεν έχουμε καμία επιπλέον χρήσιμη πληροφορία περισσότερη από αυτήν που ήδη διαθέταμε. Για να διορθωθεί το πρόβλημα τερματισμού, σε αυτήν την περίπτωση, εισάγεται μια επιπλέον συνθήκη (έλεγχος) ο οποίος προσπαθεί να εντοπίσει περιπτώσεις στις οποίες εμφανίζονται «κύκλοι» στην εκτέλεση των κανόνων, όπως για παράδειγμα στην προηγούμενη περίπτωση. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *μπλοκάρισμα (blocking)*

(Buchheit et. al., 1993). Πιο συγκεκριμένα η τεχνική αυτή κοιτάει πότε οι ισχυρισμοί που έχουν γίνει για ένα άτομο x είναι υποσύνολο των ισχυρισμών που έχουν γίνει για ένα άτομο y το οποίο συνδέεται μεταβατικά με το x μέσω κάποιας αλυσίδας ρόλων. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει τότε η εκτέλεση των κανόνων σταματάει. Τότε λέμε ότι το άτομο y μπλοκάρει το άτομο x. Σε αυτήν την περίπτωση οι ισχυρισμοί που βρίσκονται στα αμέσως *προηγούμενα* άτομα του x (δηλαδή σε όλα τα άτομα z για τα οποία ισχύει (z,x):R για κάποιο ρόλο R) μπορούν να ικανοποιηθούν χρησιμοποιώντας τους ισχυρισμούς του ατόμου y. Έτσι λοιπόν για το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε {x:A, x:∃R.A}⊆{b:A, b:∃R.A} και ο b συνδέεται με τον x μέσω του ρόλου R άρα ο b μπλοκάρει τον x. Αυτό σημαίνει ότι οι ισχυρισμοί των προηγούμενων ατόμων του x, δηλαδή του b, μπορούν να ικανοποιηθούν από τον κόμβο που μπλοκάρει τον x που σε αυτήν την περίπτωση είναι ο ίδιος ο b. Έτσι λοιπόν έχουμε, (b,b):R και b:A το οποίο ουσιαστικά είναι μια αφαίρεση του μοντέλου που κατασκευάσαμε προηγουμένως για τον ισχυρισμό μας.

5. Εκφραστικές Περιγραφικές Λογικές

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τη βασική περιγραφική λογική $\mathcal{ALC}$ αλλά και κάποιες μικρές αλλά σημαντικές επεκτάσεις της όπως οι γλώσσες $\mathcal{ALCN}$ και $\mathcal{ALCQ}$. Όπως είναι φανερό μέχρι στιγμής έχουμε εστιαστεί πολύ σε κατασκευαστές εννοιών και δεν έχουμε παρουσιάσει τις δυνατότητες που προσφέρουν οι ΠΛ για την περιγραφή ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ ρόλων. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μερικά από τα πιο σημαντικά αξιώματα ρόλων που διαθέτουν οι ΠΛ, έναν ιδιαίτερο κατασκευαστή εννοιών αλλά και σε τύπους δεδομένων.

Ένα από τα αξιώματα ρόλων που προσφέρει μεγάλη εκφραστική δυνατότητα είναι τα *αξιώματα μεταβατικών ρόλων (transitive role axioms)* (Sattler, 1996). Ένας ρόλος λέγεται μεταβατικός αν όποτε ισχύει R(a,b) και R(b,c) τότε ισχύει και R(a,c). Η ύπαρξή τους σε μια ΠΛ συμβολίζεται βάζοντας ως δείκτη στο τέλος της ονομασίας της γλώσσας το σύμβολο R^+. Δηλαδή η επέκταση της γλώσσας $\mathcal{ALC}$ με αξιώματα μεταβατικών ρόλων συμβολίζεται ως $\mathcal{ALC}_{R^+}$. Επειδή όμως η εισαγωγή πολλών κατασκευαστών και αξιωμάτων ρόλων δημιουργεί μεγάλα ονόματα χρησιμοποιούμε το γράμμα $\mathcal{S}$ για να αναφερθούμε στη γλώσσα $\mathcal{ALC}_{R^+}$. Η σύνταξη των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων είναι η, **Tr**(R) όπου R είναι ένας ρόλος, ενώ η σημασιολογία είναι η εξής: Αν $\{(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}), (b^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\}\subseteq R^{\mathcal{I}}$ τότε $(a^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in R^{\mathcal{I}}$ το οποίο δηλώνει ότι η R είναι μεταβατική. Χρησιμοποιώντας τέτοιου είδους αξιώματα μπορούμε να περιγράψουμε ότι ο ρόλος εχωΑπογονο είναι μεταβατικός ως, **Tr**(εχωΑπογονο).

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό που προσφέρουν οι ΠΛ είναι η δυνατότητα περιγραφής *αξιωμάτων υπαγωγής ρόλων (role inclusion axioms)* (Horrocks et. al., 1999). Η ύπαρξή τους συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{H}$. Συντακτικά τα αξιώματα υπαγωγής ρόλων δηλώνονται με τον ίδιο τρόπο που δηλώνονται και τα αξιώματα υπαγωγής εννοιών. Δηλαδή αν R και S είναι δυο ρόλοι τότε το αξίωμα R⊑S δηλώνει ότι ο ρόλος R είναι υπο-ρόλος του S. Αντίστοιχα, λέμε ότι μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα υπαγωγής ρόλων R⊑S αν $R^{\mathcal{I}}\subseteq S^{\mathcal{I}}$. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτού του είδους τα αξιώματα μπορούν να δημιουργήσουν *ιεραρχίες ρόλων (role hierarchies).* Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα αυτά λοιπόν μπορούμε να εκφράσουμε τη γνώση ότι ο ρόλος εχωΠαιδι είναι υπο-ρόλος του ρόλου έχωΑπογονο, γράφοντας εχωΠαιδι⊑εχωΑπογονο. Έτσι λοιπόν αν έχουμε το ABox $\mathcal{A}$={(a,b):εχωΠαιδι, (b,c):εχωΠαιδι, c:Θηλυκό} και τα αξιώματα **Tr**(εχωΑπογονο) και εχωΠαιδι⊑εχωΑπογονο τότε το $\mathcal{A}$ συνεπάγεται τον ισχυρισμό a:∃εχωΑπογονο.Θηλυκό.

Τέλος μια ακόμα ιδιότητα ρόλων είναι οι *αντίστροφοι ρόλοι (inverse roles)* (Horrocks et. al., 1999). Οι αντίστροφοι ρόλοι, η ύπαρξη των οποίων συμβολίζεται με το γράμμα $\mathcal{I}$, έχουν τη σύνταξη R^-, ενώ η σημασιολογία τους δίνεται από τη σχέση, $(a,b)\in R^{\mathcal{I}}$ ανν $(b,a)\in(R^-)^{\mathcal{I}}$. Στην πραγματικότητα από μόνοι τους οι αντίστροφοι ρόλοι δεν αποτελούν αξιώματα, απλώς μας δίνεται η δυνατότητα να δημιουργήσουμε έννοιες της μορφής $\exists$εχωΑπογονο$^-$.Ψηλό η οποία περιγράφει αυτούς που έχουν κάποιον ψηλό πατέρα ή παππού. Αυτό συμβαίνει γιατί εφόσον η σχέση εχωΑπογονο είναι μεταβατική το ίδιο είναι και η σχέση εχωΑπογονο$^-$. Στην περίπτωση που οι αντίστροφοι ρόλοι χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τα αξιώματα υπαγωγής ρόλων τότε μπορούμε να δηλώσουμε ότι ο ρόλος εχωΑπογονο είναι ο αντίστροφος του ρόλου εχωΠρογονο γράφοντας εχωΠρογονο$\sqsubseteq$εχωΑπογονο$^-$. Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι ένα αξίωμα της μορφής $R\sqsubseteq S$ συνεπάγεται το αξίωμα $R^-\sqsubseteq S^-$. Όπως τα αξιώματα υπαγωγής και ισοδυναμίας εννοιών αλλά και τα αξιώματα ισχυρισμών οργανώνονται σε σώματα ορολογίας (TBox) και σε σώματα ισχυρισμών (ABox), έτσι και τα αξιώματα ρόλων οργανώνονται στο *σώμα ρόλων (RBox – Role box)*. Ένα RBox συμβολίζεται με $\mathcal{R}$ και περιέχει ένα σύνολο από αξιώματα ρόλων του τύπου που αναφέραμε προηγουμένως. Παρατηρήστε ότι όλες οι υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων μπορούν να οριστούν με βάση ένα TBox και ένα RBox. Η επέκταση των ορισμών αυτών είναι προφανής. Αντίθετα με τα TBox τα RBox δεν μπορούν να εξαλειφθούν.

Έστω το ABox $\mathcal{A}$={a:¬Τσιγκούνης, (a,b):εχωΠαιδι, (b,c):εχωΠαιδι} και το RBox $\mathcal{R}$={**Tr**(εχωΑπογονο), εχωΠαιδι$\sqsubseteq$εχωΑπογονο, εχωΠρογονο$\sqsubseteq$εχωΑπογονο$^-$, εχωΑπογονο$\sqsubseteq$εχωΠρογονο$^-$}. Τώρα το παραπάνω ABox σε συνδυασμό με τα αξιώματα ρόλων συνεπάγεται τον ισχυρισμό c:$\exists$εχωΠρογονο.¬Τσιγγουνης. Αυτό συμβαίνει γιατί σε όλα τα μοντέλα του ABox θα ισχύουν οι σχέσεις $(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}})\in$εχωΠαιδι$^{\mathcal{I}}$, $(b^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in$εχωΠαιδι$^{\mathcal{I}}$. Επειδή η $\mathcal{I}$ πρέπει να ικανοποιεί και τα αξιώματα του RBox, λόγω του εχωΠαιδι$\sqsubseteq$εχωΑπογονο πρέπει να έχουμε $(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}})\in$εχωΑπογονο$^{\mathcal{I}}$, $(b^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in$εχωΑπογονο$^{\mathcal{I}}$ και λόγω της μεταβατικότητας του ρόλου εχωΑπογονο ισχύει ότι, $(a^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in$εχωΑπογονο$^{\mathcal{I}}$. Επιπρόσθετα, από το αξίωμα εχωΑπογονο$\sqsubseteq$εχωΠρογονο$^-$ προκύπτει ότι $(a^{\mathcal{I}},c^{\mathcal{I}})\in$(εχωΠρογονο$^-$)$^{\mathcal{I}}$ ενώ από τη σημασιολογία των αντίστροφων ρόλων προκύπτει ότι $(c^{\mathcal{I}},a^{\mathcal{I}})\in$εχωΠρογονο$^{\mathcal{I}}$. Εν κατακλείδι έχουμε $(c^{\mathcal{I}},a^{\mathcal{I}})\in$εχωΠρογονο$^{\mathcal{I}}$ και $a^{\mathcal{I}}\in$(¬Τσιγκούνης)$^{\mathcal{I}}$ και άρα σε όλα τα μοντέλα του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{R}$ ισχύει ότι $a^{\mathcal{I}}\in\exists$εχωΠρογονο. (¬Τσιγγουνη)$^{\mathcal{I}}$. Η ΠΛ που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε τη γνώση μας στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν η γλώσσα $\mathcal{SHI}$.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι η ύπαρξη μεταβατικών ρόλων και ιεραρχίας ρόλων δίνει τη δυνατότητα να εξαλείψουμε το αξίωμα που προκύπτει από τη διαδικασία εσωτερίκευσης (Horrocks et. al., 1999). Υπενθυμίζουμε ότι για $\mathcal{T}$={$C_i\sqsubseteq D_i$} όπου $1\leq i\leq n$ δημιουργούμε την έννοια $C_{\mathcal{T}}\equiv(\neg C_1\sqcup D_1)\sqcap\ldots\sqcap(\neg C_n\sqcup D_n)$ και το αξίωμα $\top\sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$. Άντ' αυτού εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε έναν ρόλο U ο οποίος παίζει το ρόλο του μεταβατικού υπερ-ρόλου όλων των ρόλων που εμφανίζονται στο $\mathcal{T}$ το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$. Γι αυτό το λόγο θέτουμε $R\sqsubseteq U$ για κάθε ρόλο που εμφανίζεται στο $\mathcal{T}$, στο $\mathcal{R}$ και στο $\mathcal{A}$ και τέλος θέτουμε **Tr**(U). Σε περίπτωση που η γλώσσα επιτρέπει και αντίστροφους ρόλους θέτουμε επιπλέον $R^-\sqsubseteq U$. Τέλος αποδεικνύεται ότι το C είναι ικανοποιήσιμο μβτ $\mathcal{T}$ και το $\mathcal{R}$ ανν το $C\sqcap C_{\mathcal{T}}\sqcap\forall U.C_{\mathcal{T}}$ είναι ικανοποιήσιμο μβτ $\mathcal{R}$, και το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μβτ $\mathcal{T}$ και το $\mathcal{R}$ ανν το $\mathcal{A}\cup\{a:C_{\mathcal{T}}\sqcap\forall U.C_{\mathcal{T}}$ | το a υπάρχει στο $\mathcal{A}$ } είναι συνεπές μβτ $\mathcal{R}$. Διαισθητικά ο μεταβατικός υπερ-ρόλος παίζει το ρόλο του αξιώματος $\top\sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα το αξίωμα αυτό φροντίζει ώστε οι παραπάνω περιορισμοί να εφαρμοστούν σε όλα τα άτομα του κόσμου μας. Παρομοίως ο μεταβατικός υπερ-ρόλος φροντίζει οι περιορισμοί του TBox (η έννοια $C_{\mathcal{T}}$ δηλαδή) να μεταβιβαστεί σε όλα τα άτομα που θα δημιουργηθούν από τον αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων.

Τελειώνοντας την παρουσίαση μας στους κατασκευαστές εννοιών των περιγραφικών λογικών θα παρουσιάσουμε έναν ιδιαίτερο κατασκευαστή. Ο κατασκευαστής αυτός ονομάζεται *ονοματική έννοια (nominal concept)* και δημιουργεί έννοιες απαριθμώντας ρητά τα μέλη τους (Schaerf, 1994). Για παράδειγμα αν τα a, b και c είναι άτομα τότε τα {a}, {b} και {c} είναι έννοιες. Η σημασιολογία των εννοιών αυτών είναι αρκετά απλή. Πιο συγκεκριμένα μια έννοια {a} ερμηνεύεται ως το σύνολο του $\Delta^{\mathcal{I}}$ το οποίο περιέχει ως μέλος μόνο το αντικείμενο $a^{\mathcal{I}}$, δηλαδή $\{a\}^{\mathcal{I}}=\{a^{\mathcal{I}}\}$. Παρατηρούμε ότι αυτός ο κατασκευαστής μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε άτομα μέσα σε μια ορολογία. Η ύπαρξή του σε μια ΠΛ δηλώνεται με το γράμμα $\mathcal{O}$, ενώ χρησιμοποιώντας αυτήν την εκφραστική δυνατότητα μπορούμε να δηλώσουμε έννοιες όπως είναι η έννοια του Έλληνα, ως Έλληνας⊑∃εχειΚατοικία.{Ελλάδα}, ή αν η ΠΛ επιτρέπει τη χτήση ένωσης μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια των ημερών της εβδομάδας ως, ΜέρεςΕβδομάδος≡{Δευτέρα}⊔{Τρίτη}⊔...⊔{Κυριακή}.

Τελειώνοντας την παρουσίασή μας στις εκφραστικές Περιγραφικές Λογικές θα αναφερθούμε στις δυνατότητες τις οποίες παρέχουν για την περιγραφή *τύπων δεδομένων (datatypes).* Η έννοια των τύπων δεδομένων θα πρέπει να μας είναι γνωστή από τις γλώσσες προγραμματισμού ή τις βάσεις δεδομένων. Όπως είναι γνωστό οι γλώσσες αυτές παρέχουν τύπους δεδομένων όπως είναι οι ακέραιοι (integers), δεκαδικοί (floats), συμβολοσειρές (strings), και άλλοι. Στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις για την εισαγωγή τύπων δεδομένων στις ΠΛ, κάθε μια από τις οποίες έχει διαφορετικές ιδιότητες όπως είναι για παράδειγμα η εκφραστική δυνατότητα ή η υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την προσέγγιση type system (Horrocks et. al., 2001), η οποία συμβολίζεται με το γράμμα **D**.

Τυπικά, ένα type system **D** ορίζεται ως το ζευγάρι $(\Delta_{\mathbf{D}}, \Phi_{\mathbf{D}})$, όπου $\Phi_{\mathbf{D}}$ αποτελεί το σύνολο των ονομάτων τύπων δεδομένων (datatype names), δηλαδή integer, string, κλπ, ενώ $\Delta_{\mathbf{D}}$ είναι ο χώρος ερμηνείας όλων αυτών των ονομάτων. Έτσι κάθε όνομα τύπου δεδομένων $p\in\Phi_{\mathbf{D}}$ σχετίζεται με ένα σύνολο $p^{\mathbf{D}}\subseteq\Delta_{\mathbf{D}}$. Είναι πολύ σημαντικό να προσέξουμε ότι ο χώρος ερμηνείας των τύπων δεδομένων ($\Delta_{\mathbf{D}}$) είναι ξένος με το χώρο ερμηνείας των εννοιών, των ρόλων και των ατόμων ($\Delta^{\mathcal{I}}$). Επιπρόσθετα, ενώ μια έννοια, ρόλος ή άτομο μπορεί να έχει πολλές ερμηνείες ένα όνομα τύπου δεδομένου έχει μια σταθερή ερμηνεία. Για παράδειγμα το όνομα string ερμηνεύεται ως το υποσύνολο όλων των συμβολοσειρών του $\Delta_{\mathbf{D}}$. Για τη δημιουργία εννοιών σε μια ΠΛ τα ονόματα τύπων δεδομένων χρησιμοποιούνται με τον περιορισμό τιμής και τον υπαρξιακό περιορισμό. Για παράδειγμα αν T είναι ένας ρόλος, ο οποίος ονομάζεται concrete role, και p ένα όνομα τύπου δεδομένου τότε τα $\forall T.p$ και $\exists T.p$ είναι έννοιες. Η ερμηνεία του υπαρξιακού περιορισμού είναι η ακόλουθη, $(\exists T.p)^{\mathcal{I}}=\{a\in\Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y.\ (x,y)\in T^{\mathcal{I}} \text{ και } y\in p^{\mathbf{D}}\}$. Έστω για παράδειγμα το type system **D**, το οποίο περιέχει τα ονόματα τύπων δεδομένων string και $>_{15}$ δηλαδή των συμβολοσειρών και του τύπου δεδομένων που περιέχει όλους τους ακεραίους αυστηρά μεγαλύτερους του 15. Τότε η έννοια $\exists$εχειΗλικια.$>_{15}$ περιγράφει το σύνολο των ανθρώπων που είναι ηλικιακά μεγαλύτεροι από 15 ετών, ενώ η έννοια ∃εχειΜικροΟνομα.«Γιώργος» περιγράφει το σύνολο των ανθρώπων που το μικρό τους όνομα είναι Γιώργος. Σε αυτό το σημείο πρέπει να προσέξουμε τη διαφορά μεταξύ του ατόμου Γιώργος και της συμβολοσειράς «Γιώργος».

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε μια διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων η οποία αποφασίζει το πρόβλημα της συνέπειας ενός ABox στην ΠΛ $\mathcal{ALCQ}$. Για να αντιμετωπίσουμε τα νέα χαρακτηριστικά που παρουσιάσαμε στην ενότητα αυτή χρειαζόμαστε να εισάγουμε νέους κανόνες tableaux ή σε πολλές περιπτώσεις να αναθεωρήσουμε και να επεκτείνουμε τους υπάρχοντες κανόνες. Ακόμα περισσότερο σε πολλές περιπτώσεις η αλληλεπίδραση μεταξύ κάποιων κατασκευαστών είναι τόσο περίπλοκη που χρειάζεται να επινοήσουμε ιδιαίτερα ευφυείς τεχνικές για να δημιουργήσουμε μια ορθή και πλήρης διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων. Η παρουσίαση μιας τέτοιας διαδικασίας για οποιαδήποτε από τις προαναφερθείσες γλώσσες όπως οι $\mathcal{S}$, $\mathcal{SI}$, $\mathcal{SHI}$ και $\mathcal{SHOIQ}$ αλλά ακόμα και απλές επεκτάσεις της $\mathcal{ALCQ}$ όπως είναι η $\mathcal{ALCQI}$ είναι αρκετά δύσκολη και ξεφεύγει από τα πλαίσια μιας απλής εισαγωγής. Ο αναγνώστης που θέλει να επεκταθεί στις γλώσσες αυτές μπορεί να απευθυνθεί στο (Sattler, 1996) για τη γλώσσα $\mathcal{S}$, στο (Horrocks et. al., 1999) για τις γλώσσες $\mathcal{SI}$, $\mathcal{SHI}$ και $\mathcal{SHIF}$, στο (Horrocks et. al., 2000) για τη γλώσσα $\mathcal{SHIQ}$ στο (Horrocks et. al., 2001) για τη γλώσσα $\mathcal{SHOQ}(\mathbf{D})$ και στο (Horrocks et. al., 2005) για τη γλώσσα $\mathcal{SHOIQ}$. Τέλος, στο (Baader et. al., 2000) γίνεται μια παρουσίαση αλγορίθμων tableaux για πολλές από της ΠΛ που είδαμε.

Αναφορές

Baader, F., (1991) Augmenting Concept Languages by Transitive Closure of Roles: An Alternative to Terminological Cycles. *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI' 91)*.

Baader, F., Calvanese, D., McGuinness, D., Nardi, D., & Patel-Schneider, P.F. (2002) The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications. Cambridge Univeristy Press.

Baader, F., Horrocks, I., Sattler, U. (2002) Description Logics for the Semantic Web. *KI – Kunstliche Intelligenz,* Vol. 16, No. 4, pp. 57-59.

Baader, F., Sattler., U. (2000) An Overview of Tableau Algorithms for Description Logics. *Proceedings of the International Conference on Automated Reasoning with Tableaux and Related Methods (Tableaux 2000).* Vol 1847, pp. 1-18. Springer-Verlag.

Buchheit, M., Donini, M.F., Schaerf, A. (1993) Decidable Reasoning in Terminological Knowledge Representation Systems. *Journal of Artificial Intelligence Research,* Vol. 1, pp. 109-138.

Donini, F.M., Lenzerini, M., Nardi, D., Schaerf A., (1994) Deduction in Concept Languages: From Subsumption to Instance Checking, *Journal of Logic and Computation,* Vol. 4, No. 4, pp. 423-452.

Hollunder, B., Nutt, W., (1990) Subsumption Algorithms for Concept Languages. *Proceedings of the 9th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI' 90),* pp. 348-353.

Horrocks, I., Sattler, U., (1999) A Description Logic with Transitive and Inverse Roles and Role Hierarchies. *Journal of Logic and Computation*, Vol. 9, No. 3, pp. 385-410.

Horrocks, I., Sattler, U. (2001) Ontology Reasoning in the $\mathcal{SHOQ}(\mathbf{D})$ Description Logic. *Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI '01).*

Horrocks, I., Sattler, U., (2005) A Tableaux Decision Procedure for $\mathcal{SHOIQ}$. Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI' 05).

Lutz C., (1999) Complexity of Terminological Reasoning Revisited. *Proceedings of the 6th International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning (LPAR' 99),* vol. 1705 of Lecture Notes in Artificial Intelligence, pages 181-200.

Mendelson, E. (1987) Introduction to Mathematical Logic, *3rd ed.*

Nebel, B., (1990a) Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer-Verlag.

Nebel, B., (1990b) Terminological Reasoning is Inherently Intractable, *Artificial Intelligence,* Vol. 43, pp. 235-249.

Quillian, R., (1967) Word Concepts: A Theory and Simulation of sime basic capabilities. *Behavioural Science.*

Sattler, U., (1996) A Concept Language Extended with Different Kinds of Transitive Roles. *Proceedings of the 20th Annual German Conference on Artificial Intelligence*, pp. 333-345, Springer-Verlag.

Schaerf, A., (1994) Reasoning with Individuals in Concept Languages. *Data and Knowledge Engineering.* Vol. 13, No. 2, pp. 141-176.

Schmidt-Schauss M., Smolka G., (1991) Attributive Concept Descriptions with Complements. *Artificial Intelligence,* Vol. 48, No. 1, pp. 1-26.

Tobies, S., (2001) Complexity Results and Practical Algorithms for Logics in Knowledge Representation. PhD Thesis, LuFG Theoretical Computer Science, RWTH – Aachen, Germany.

Διευθύνσεις URL

1. Η επίσημη ιστοσελίδα για τις Περιγραφικές Λογικές: http://dl.kr.org/
2. Εισαγωγικό σεμινάριο για τις Περιγραφικές Λογικές από τον Enrico Franconi: http://www.inf.unibz.it/%7Efranconi/dl/course/

Ακρωνύμια – Συντομεύσεις

DLs	Description Logics
ΠΛ	Περιγραφικές Λογικές
TBox	Terminological Box
ABox	Assertional Box
RBox	Role Box
NNF	Negation Normal Form
GCIs	General Concept Inclusions

Γλωσσάριο

assertion	*ισχυρισμός*
blocking	*μπλοκάρισμα*
cardinality	*πληθυκότητα*
clash	*σύγκρουση*
completeness	*πληρότητα*
consistency	*συνέπεια*
constructors	*κατασκευαστές*
datatypes	*τύποι δεδομένων*
entailment	*συνεπαγωγή*
equivalence	*ισοδυναμία*
expansion	*επέκταση*
functional	*συναρτησιακός*
formal	*τυπικό*
individual	*άτομο*
inference	*συμπερασμός*
internalization	*εσωτερίκευση*
interpretation	*ερμηνεία*
model	*μοντέλο*
nominal	*ονοματική έννοια*
reasoning	*συλοκιστική*
semantics	*σημασιολογία*
satisfiability	*ικανοποιησιμότητα*
soundness	*ορθότητα*
subsumption	*υπαγωγή*
terminology	*ορολογία*
unfolding	*ξεδίπλωμα*